

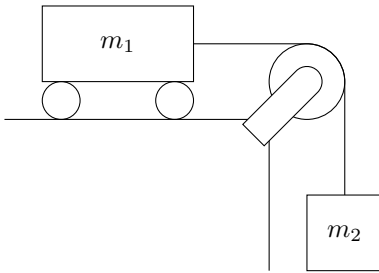
# 1 Zasady dynamiki Newtona dla punktu materialnego

- Układy w których ciała, na które nie działają żadne siły, poruszają się ruchem jednostajnym prostoliniowym (nie zmieniają prędkości), nazywamy *układami inercyjnymi*
- W układzie inercyjnym:  $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ , gdzie  $\vec{F}$  - wypadkowa siła działająca na ciało.
- Jeżeli ciało A działa na ciało B siłą  $\vec{F}$ , to ciało B działa na ciało A siłą  $-\vec{F}$ .

1 Ciało o masie  $m$  wisi na sprężynie o stałej sprężystości  $k$  i zostaje odciągnięte w pionie od położenia równowagi. Znajdź równania ruchu ciała.

2 Punkt materialny o masie  $m$  wisi na nitce o długości  $l$  i zostaje odchylony od położenia równowagi w poziomie (wahadło matematyczne). Znajdź równania ruchu.

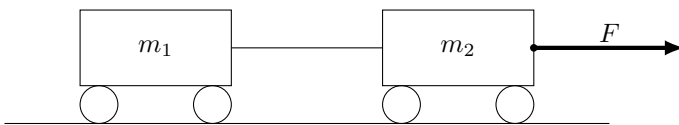
3 Znajdź równania ruchu układu z rysunku



4 Łańcuch w chwili początkowej zwisa ze stołu w  $\frac{1}{4}$  długości i ześlizguje się bez tarcia. Znajdź równania ruchu.

## 1.1 Trzecia zasada dynamiki, pęd i zasada zachowania pędu

5 Znajdź równania ruchu układu z rysunku



6 Na rakietę działa stała siła ciągu powstająca ze spalania w chwili czasu stałej ilości paliwa. Znajdź równanie ruchu rakiety poruszającej się w pionie w stałym polu grawitacyjnym.

## 1.2 Układy dysypatywne

7 Kłoczek o masie  $m$  jest przyczepiony do poziomej sprężyny o stałej sprężystości  $k$  i odciągnięty od położenia równowagi. Współczynnik tarcia kinetycznego między klockiem a stołem wynosi  $\mu$ . Znajdź równanie ruchu klocka.

8 Rozwiąż zadanie 4 uwzględniając współczynnik tarcia kinetycznego  $\mu$  pomiędzy łańcuchem a stołem.

9 Rozwiąż zagadnienie rzutu ukośnego w stałym polu grawitacyjnym z siłą oporu proporcjonalną do prędkości i przeciwnie do niej skierowaną.

## 1.3 Statyka

Układ ciał pozostaje w spoczynku, gdy siły działające na każdy element układu są równe 0  $\Rightarrow$  gdy energia potencjalna układu przyjmuje wartość minimalną.

10 Szttywna rama z drutu w kształcie trójkąta jest umieszczona w płaszczyźnie pionowej. Na bokach ramy o kątach nachylenia  $\alpha$  i  $\beta$  do poziomu i wspólnym wierzchołku nawleczone są dwa koraliki o masach odpowiednio  $m_1$  i  $m_2$  połączone nierozciągliwą nitką. Koraliki mogą się ślizgać po bokach ramy bez tarcia. Jaki kąt  $\gamma$  tworzy nić z poziomem, gdy układ jest w równowadze?

## 2 Rachunek wariacyjny

Zadaniem rachunku wariacyjnego jest znajdowanie ekstremów funkcjonałów określonych na przestrzeniach funkcyjnych, np:

- Po jakim torze pomiędzy punktami  $(x_1, y_1)$  a  $(x_2, y_2)$  ciało w polu grawitacyjnym stoczy się najszybciej?
- Jaki kształt przyjmie bańka mydlana rozpięta na określonym konturze (membrana stara się przyjąć minimalną powierzchnię)?
- Jaki kształt przyjmie nierozciągliwy łańcuch zawieszony między dwoma punktami?
- Jaki kształt przyjmie rozciągliwy łańcuch zawieszony między dwoma punktami?

Niech  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Rozważamy przestrzeń  $C^1([a, b], \mathbb{R})$  funkcji rzeczywistych o ciągłej pierwszej pochodnej, wyposażoną w normę

$$\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)| + \max_{x \in [a, b]} |f'(x)| \quad (1)$$

oraz przestrzeń funkcjonałów ciągłych na tej przestrzeni postaci  $\Phi(f) = \int_{x \in [a, b]} F(x, f, f') dx$ , gdzie jest funkcją klasy  $C^2([a, b] \times \mathbb{R}^2)$ . Funkcjonał taki nazywamy *działaniem* a funkcję  $F$  nazywamy *Lagrangianem* tego działania.

Zbadajmy różnicę  $\Phi(f + \delta f) - \Phi(f)$ , dla funkcji  $\delta f$  o małej normie, znikających na krańcach przedziału. Liniowy składnik tej różnicy wynosi

$$\int_{x \in [a, b]} (\partial_f F \cdot \delta f + \partial_{f'} F \cdot \delta f') dx = \int_{x \in [a, b]} \partial_f F \cdot \delta f dx - \int_{x \in [a, b]} \frac{d}{dx} \partial_{f'} F \cdot \delta f dx + \partial_{f'} F \cdot \delta f \Big|_a^b \quad (2)$$

Wyrażenie to musi się zerować w lokalnym ekstremum funkcjonału dla dowolnej funkcji  $\delta f$  znikającej na końcach przedziału. Prowadzi to do równania różniczkowego:

$$\partial_f F - \frac{d}{dx} \partial_{f'} F = 0 \quad (3)$$

nazywanego równaniem Eulera-Lagrange'a dla funkcjonału.

Równanie to ma następujące uogólnienia:

- Jeżeli funkcjonał zależy od wielu funkcji tej samej zmiennej:

$$\forall i \quad \partial_{f_i} F - \frac{d}{dx} \partial_{f'_i} F = 0 \quad (4)$$

- Jeżeli  $f$  jest określona na obszarze  $U \subset \mathbb{R}^n$ , a  $\delta f$  znika na brzegu obszaru:

$$\partial_f F - \sum_{j=1}^n \frac{d}{dx_j} \partial_{f_{,j}} F = 0 \quad (5)$$

- Jeżeli funkcjonał zależy od wielu funkcji określonych na obszarze  $U \subset \mathbb{R}^n$ , a  $\delta f$  znika na brzegu obszaru:

$$\forall i \quad \partial_{f_i} F - \sum_{j=1}^n \frac{d}{dx_j} \partial_{f_{i,j}} F = 0 \quad (6)$$

Jeżeli  $\partial_x F = 0$ , wtedy równanie E-L redukuje się do:

$$F - f' \partial_{f'} F = C, \quad (7)$$

gdzie  $C$  jest pewną stałą.

Jeżeli szukamy ekstremum pewnego funkcjonału  $F$  przy warunku stałości innego funkcjonału  $G$ , szukamy funkcji, dla których funkcjonał  $F - \lambda G$  się zeruje. Stałą  $\lambda$  (mnożnik Lagrange'a) dobieramy następnie w rozwiązaniu tak, aby wartość funkcjonału  $G$  była prawidłowa.

**11** Znajdź trajektorię między ustalonymi punktami, w jednorodnym polu grawitacyjnym, którą ciało pokona w najkrótszym czasie (brachistona).

**12** Znajdź kształt, który przybierze **nierozciągliwy** łańcuch zawieszony pomiędzy dwoma ustalonymi punktami w jednorodnym polu grawitacyjnym.

### 3 Mechanika klasyczna

#### 3.1 Mechanika Lagrange'a

Równanie Newtona  $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$  (jeżeli siła jest potencjalna) możemy przepisać jako:

$$\frac{d}{dt}\partial_{\dot{\vec{r}}}E_k + \partial_{\vec{r}}E_p = 0 \quad (8)$$

Jest to równanie E-L dla funkcjonału  $E_k - E_p$ . Ciało, które ma przebyć drogę pomiędzy dwoma ustalonymi punktami w dwóch chwilach czasu, wybierze taką, dla której  $S = \int_{t_0}^{t_1} (E_k - E_p) dt$  (średnia różnica energii kinetycznej i potencjalnej) jest najmniejsza. Wielkość  $S$  nazywamy działaniem, a wyrażenie podcałkowe lagrangianem.

Dla ruchu swobodnego w kartezjańskim układzie współrzędnych równania E-L dla tego funkcjonału dają równania Newtona. Sformułowanie Lagranżowskie pozwala na uzyskanie równań w ogólniejszych sytuacjach, w innych układach współrzędnych i gdy obecne są więzy.

**13** Wyprowadź równanie ruchu wahadła matematycznego.

**14** Wyprowadź równania podwójnego ruchu wahadła sprzężonego.

#### 3.2 Mechanika Hamiltona

Wprowadźmy wielkości:

$$p_i = \partial_{\dot{q}_i} L, \quad (9)$$

nazywane pędami (pędami kanonicznymi) oraz zdefiniujmy nową funkcję  $H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$ , a następnie wyrażmy w niej wszystkie  $\dot{q}_i$  przez  $p_i$  odwracając równania (9). Mamy:

$$H(t, p, q) = \sum_i p_i \dot{q}_i(p, q) - L(t, q, \dot{q}(p, q)) \quad (10)$$

Funkcja ta nazywana jest hamiltonianem. Różniczkę zupełną lagranżianu na ekstemali działania możemy zapisać jako:  $dL = \sum_i (p_i dq_i + \dot{p}_i dq_i) + \partial_t L dt$ . Różniczka hamiltonianu jest równa  $dH = \sum_i (p_i dq_i + \dot{q}_i dp_i) - dL = \sum_i (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \partial_t L dt$ . Stąd mamy równania:

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= -\partial_{q_i} H \\ \dot{q}_i &= \partial_{p_i} H \end{aligned}$$

nazywane równaniami Hamiltona.

Teraz zamiast jednego równania drugiego rzędu mamy dwa równania pierwszego rzędu opisujące pole wektorowe na dwuwymiarowej przestrzeni fazowej, która jest teraz  $T^*M$  - wiązką kostyczną do rozmaitości konfiguracyjnej. Możemy je przepisać jako:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \vec{p} \\ \vec{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix} \nabla_{(\vec{p}, \vec{q})} H \quad (11)$$

Równanie to przypisuje wektor styczny w punkcie rozmaitości gradientowi pewnej funkcji określonej na rozmaitości (jednoformie). Żeby utożsamić wektor z jednoformą potrzebujemy gładkiej formy dwuliniowej określonej na rozmaitości, odpowiednika iloczynu skalarnego. W mechanice hamiltonowskiej forma ta jest niezdegenerowana i antysymetryczna. Taką formę nazywamy symplektyczną.

Do tej pory, nasza przestrzeń fazowa ma topologię wiązki kostycznej, ponieważ startowaliśmy z funkcji Lagrange'a określonej na wiązce stycznej do rozmaitości konfiguracyjnej. Mechanika Hamiltona dopuszcza ogólniejsze topologie przestrzeni fazowej - wystarczy by miała ona określoną gładką formę symplektyczną  $J(\vec{q}, \vec{p})$ .

#### 3.3 Zachowanie objętości fazowej, chaos deterministyczny i mechanika statystyczna

Pole prędkości fazowej jest bezźródłowe:

$$\text{div}(\dot{\vec{q}}, \dot{\vec{p}}) = \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right) = \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} \right) = 0$$

Twierdzenie Liouville'a mówi, że przepływ bezźródłowy zachowuje objętość. Punkty przestrzeni fazowej zachowują się jak przepływająca nieściśliwa ciecz (można udowodnić więcej - zachowana jest forma symplektyczna i jej wszystkie potęgi zewnętrzne, aż do najwyższej - formy objętości).

Zachowana jest zatem pewna miara na przestrzeni fazowej. Możemy rozważać, jak będzie ewoluował rozkład prawdopodobieństwa. Opisuje to równanie Liouville'a:

$$\frac{d}{dt} \rho = -\{\rho, H\} \stackrel{df}{=} \sum_i \left( \frac{\partial \rho}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \right) \quad (12)$$

## 4 Symetrie i prawa zachowania

### 4.1 Grupy Liego i ich algebry

Grupa topologiczna to grupa wraz z określoną topologią na zbiorze elementów, taką że działanie grupowe oraz branie elementu odwrotnego jest ciągle. Grupa Liego to grupa topologiczna będąca jednocześnie rozmaitością różniczkową klasy  $C^\infty$ , w której działanie grupowe oraz branie elementu odwrotnego jest klasy  $C^\infty$ . Skupimy się na typowych przykładach podgrup Liego - domkniętych podgrupach grupy  $GL(n)$  (nad  $\mathbb{R}$  lub  $\mathbb{C}$ ). Ograniczmy się do grup spójnych.

Algebra Liego to przestrzeń liniowa nad  $\mathbb{R}$  lub  $\mathbb{C}$  wyposażona w działanie  $[X, Y]$ , które jest antysymetryczne i spełnia tożsamość Jacobiego:  $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ .

Przykładem algebry Liego jest  $\mathbb{R}^3$  w iloczynie wektorowym. Innym przykładem jest algebra macierzy kwadratowych z działaniem komutatora. Każda algebra Liego da się zrealizować jako pewna podalgebra algebry macierzy kwadratowych zamknięta na komutator.

Podalgebra - podprzestrzeń zamknięta na działanie  $[\cdot, \cdot]$ . Podalgebra  $\mathfrak{h}$  jest ideałem w  $\mathfrak{g}$ , jeżeli  $\forall X \in \mathfrak{g}, \forall Y \in \mathfrak{h} [X, Y] \in \mathfrak{h}$ . Suma prosta algebr Liego (jako przestrzeni liniowych) jest również algebrą Liego z działaniem:  $[X_1 \times Y_1, X_2 \times Y_2] = [X_1, X_2] \times [Y_1, Y_2]$ .

Algebra Liego  $\mathfrak{g}$  grupy  $G$  to przestrzeń styczna do rozmaitości grupowej w elemencie neutralnym, z komutatorem jako działaniem. Elementy grupy są eksponentami elementów algebry:

$$\mathfrak{g} = \{X \in M_n : e^{iX} \in G\} \quad (13)$$

Elementy algebry Liego nazywamy generatorami infintezymalnymi grupy. Własności grupy Liego są zakodowane we własnościach jej algebry Liego: podalgebry odpowiadają podgrupom, a ideały dzielnikom normalnym. Grupa jest iloczynem prostym grup, jeżeli jej algebra Liego jest sumą prostą algebr Liego. Każdej algebrze Liego odpowiada spójna grupa Liego.

#### Przykłady:

- Składowa jedynki w  $GL(n) \mapsto \mathfrak{g} = M(n)$
- Składowa jedynki w  $SL(n) \mapsto \mathfrak{g} = \{X \in M(n) : \text{Tr} X = 0\}$
- $O(n) \mapsto \mathfrak{g} = \{iX : X \in M(n) \wedge X^T = -X\}$
- $Lie(SO(2)) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}\right\}$
- $Lie(SO(3)) \cong (\mathbb{R}^3, \times)$
- $U(n) \mapsto \mathfrak{g} = \{X \in M(n) : X^\dagger = -X\}$

## 4.2 Twierdzenie Noether

Założmy, że mamy dany funkcjonal  $I : q \rightarrow \int_{[a,b]} F(x, q, \dot{q}) dt$ . Przeanalizujemy jak zmienia się on, gdy oprócz infintezymalnych zmian funkcji  $f$  na przedziale  $[a, b]$  dopuszczamy również przeparametryzowania odcinka  $[a, b]$ , tzn. zmienna niezależna staje się funkcją:  $t : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  i rozważamy funkcjonal  $q \rightarrow \int_{[a,b]} F(t, q \circ t, \dot{q} \circ t) \cdot t' d\xi$  oraz jego zmiany zarówno na zmiany  $\delta q$  jak i zmiany  $\delta t$ . Złożenie tych dwóch wariacji oznaczamy jako  $\Delta q$ . Otrzymujemy wyrażenie:

$$\Delta I = \int_{[a,b]} \left( \frac{\partial F}{\partial q} \Delta q + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \Delta \dot{q} + \frac{\partial F}{\partial t} \delta t + F \frac{d\delta t}{dt} \right) dt, \quad (14)$$

gdzie  $\Delta \dot{q} = \Delta(q'/t') = \frac{d}{dt} \Delta q - \dot{q} \frac{d}{dt} \delta t$ , a  $\Delta q = \dot{q} \delta t + \delta q$ . Znów wykorzystując całkowanie przez części możemy doprowadzić powyższe wyrażenie do postaci:

$$\Delta I = \int_{[a,b]} \left( \left( \frac{\partial F}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \right) \delta q + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \delta q + F \delta t \right) \right) dt. \quad (15)$$

Wyrażenie podcałkowe musi znikać. Daje to równanie E-L z dodatkowym składnikiem:

$$\left( \frac{\partial F}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \right) \delta q + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \delta q + F \delta t \right) = 0 \quad (16)$$

Jeżeli  $q$  jest rozwiązaniem r. E-L, to:

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \delta q + F \delta t = \text{const} \quad (17)$$

analogicznie, dla trzech niezależnych współrzędnych mamy:

$$\sum_i \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i + F \delta t = \text{const} \quad (18)$$

otrzymaliśmy następujące:

**Twierdzenie Noether:** Jeżeli Lagrangian jest niezmienniczy na działanie pewnej ciągłej grupy symetrii, to każda infintezymalna operacja z tej grupy wyprodukuje pewną zachowaną wielkość fizyczną. Niezależnych wartości zachowanych będziemy mieli tyle, ile jest generatorów grupy symetrii.

Jeżeli Lagrangian jest niezmienniczy na translację przestrzenną ( $\delta t = 0, \delta x = \text{const}, \delta y = \delta z = 0$ ), to  $\partial L / \partial \dot{x} = \text{const}$ .

Jeżeli Lagrangian jest niezmienniczy na obrót ( $\delta t = 0, \delta z = 0, \delta x = y \delta \phi, \delta y = -x \delta \phi$ ), to  $J_z = x p_y - y p_x = \text{const}$ .

Jeżeli Lagrangian jest niezmienniczy na przesunięcia w czasie ( $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0, \Delta t = \text{const}$ ), to  $\sum_i \dot{q}_i \partial L / \partial \dot{q}_i - L = \text{const}$ .

Jeżeli Lagrangian jest niezmienniczy na pchnięcia ( $x \mapsto x + vt$ ), to zachowane jest położenie środka masy.

## 5 Elektrodynamiczna klasyczna

### 5.1 Równania Maxwella

W przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  mamy dane cztery pola wektorowe:

- $\vec{E}$  - natężenie pola elektrycznego
- $\vec{D}$  - indukcja elektryczna
- $\vec{H}$  - natężenie pola magnetycznego
- $\vec{B}$  - indukcja magnetyczna

Pola te wiążą równania:

- Prawo Gaussa:  
 $\int_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV$   
– strumień indukcji elektrycznej przez powierzchnię zamkniętą jest równy zawartemu w niej ładunkowi.
- Prawo Faradaya:  
 $\int_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$   
– zmiana strumienia indukcji magnetycznej przez pewną powierzchnię wywołuje wirowe pole elektryczne wzdłuż brzegu tej powierzchni.
- Prawo Gaussa dla pola magnetycznego:  
 $\int_{\partial V} \vec{B} = 0$   
– nie istnieje ładunek magnetyczny.
- Prawo Amperé'a:  
 $\int_{\partial S} \vec{H} = \int_S \vec{j} + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D}$   
– prąd płynący przez powierzchnię wraz ze zmianą strumienia indukcji elektrycznej przez powierzchnię daje wirowe pole magnetyczne wzdłuż brzegu tej powierzchni.

Równania te nazywają się równaniami Maxwella.

Pola  $\vec{E}$  i  $\vec{D}$  oraz  $\vec{H}$  i  $\vec{B}$  wiążą dodatkowo tzw. równania materiałowe:

- $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$
- $\vec{B} = \mu \vec{H}$

$\epsilon$  i  $\mu$  nazywają się przenikalnością odpowiednio elektryczną i magnetyczną. Wielkość ta zależy od materiału i może się zmieniać od punktu do punktu w ośrodkach niejednorodnych, a nawet być polem operatorów liniowych w ośrodkach nieizotropowych. My będziemy rozważali pola tylko w próżni, gdzie wartości przenikalności są stałe i równe  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$ .

Prawo Gaussa jest równoważne prawu Coulomba - pole wokół ładunku punktowego możemy obliczyć za pomocą prawa Gaussa, z powodu liniowości prawa Gaussa, rozwiązanie dla pewnej gęstości ładunku jest kombinacją rozwiązań dla ładunków punktowych.

### 5.2 Elektrostatyka

**15** Znajdź pole wytwarzane przez odcinek długości  $l$  jednorodnie naładowany z liniową gęstością ładunku  $\lambda$  (skierowany wzdłuż osi  $x$ ).

Odp.

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( \left( \frac{1}{\sqrt{(x + \frac{l}{2})^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x - \frac{l}{2})^2 + y^2 + z^2}} \right), \right. \\ \left. \frac{y}{y^2 + z^2} \left( \frac{x + \frac{l}{2}}{\sqrt{(x + \frac{l}{2})^2 + y^2 + z^2}} - \frac{x - \frac{l}{2}}{\sqrt{(x - \frac{l}{2})^2 + y^2 + z^2}} \right), \right. \\ \left. \frac{z}{y^2 + z^2} \left( \frac{x + \frac{l}{2}}{\sqrt{(x + \frac{l}{2})^2 + y^2 + z^2}} - \frac{x - \frac{l}{2}}{\sqrt{(x - \frac{l}{2})^2 + y^2 + z^2}} \right) \right)$$

**16** W rozwiązaniu poprzedniego zadania przejdź z  $l \rightarrow \infty$ .

**17** Znajdź pole nieskończonego pręta naładowanego z liniową gęstością ładunku  $\lambda$  z prawa Gaussa.

Jeżeli pola są określone wszędzie (nie mają osobliwości), wtedy wykorzystując twierdzenie Stokesa możemy zapisać równania Maxwella w postaci różniczkowej:

- $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$
- $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$
- $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
- $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \partial_t \vec{D}$

Jeżeli nie występują zmienne pola magnetyczne (elektrostatyka), wtedy prawo Faradaya:  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$  implikuje istnienie funkcji skalarnej  $\phi$  takiej, że:  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ . Funkcję taką nazywamy potencjaem pola elektrycznego.

Potencjał ładunku punkowego  $q$  jest równy  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$ . Znajdujemy go całkując natężenie pola elektromagnetycznego. Potencjał jest określony z dokładnością do stałej (symetria cechowania potencjału). Podany potencjał jest tak wycechowany, by w nieskończoności był równy 0.

**18** Znajdź potencjał wytwarzany przez odcinek z zadania 15.

Odp.

$$\phi(x, y, z) = \frac{\lambda}{8\pi\epsilon_0} \left( \ln \left( 1 + \frac{x + \frac{l}{2}}{\sqrt{(x + \frac{l}{2})^2 + y^2 + z^2}} \right) - \ln \left( 1 - \frac{x + \frac{l}{2}}{\sqrt{(x + \frac{l}{2})^2 + y^2 + z^2}} \right) \right. \\ \left. - \ln \left( 1 + \frac{x - \frac{l}{2}}{\sqrt{(x - \frac{l}{2})^2 + y^2 + z^2}} \right) + \ln \left( 1 - \frac{x - \frac{l}{2}}{\sqrt{(x - \frac{l}{2})^2 + y^2 + z^2}} \right) \right)$$

**19** Znajdź potencjał pola elektrycznego nieskończonego pręta z zadania 17, całkując pole elektryczne.

Potencjału nieskończonego pręta nie da się wycechować do zera w nieskończoności, dlatego nie uzyskamy go wykonując przejście graniczne w rozwiązaniu zadania 18.

**20** Sprawdź, że gradient otrzymanego potencjału rzeczywiście daje rozwiązanie zadania 15.

Wstawiając pole wyrażone przez potencjał do prawa Gaussa otrzymamy równanie:

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (19)$$

nazywane równaniem Poissona (lub Laplace'a, jeżeli prawa strona jest równa 0).

**21** Znajdź rozkład potencjału w nieskończonej, pustej rurze o przekroju kwadratowym, której trzy ścianki są uziemione, a czwarta jest odizolowana od pozostałych i ma przyłożony potencjał  $V_0$ .

### 5.3 Siła Lorentza

Na cząstkę naładowaną w polu elektrycznym działa siła Lorentza:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (20)$$

**22** Znajdź trajektorię cząstki naładowanej w jednorodnym polu magnetycznym.

Jeżeli przez przewód umieszczony w polu magnetycznym płynie prąd, to wypadkowa sił Lorentza działających na poruszające się w przewodniku ładunki daje *siłę elektrodynamiczną*:

$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}, \quad (21)$$

gdzie wektor  $l$  łączy końce przewodu i ma zwrot zgodny z kierunkiem prądu.

**23** Jaki moment siły działa na prostokątną ramkę z prądem umieszczoną w polu magnetycznym? (silnik prądu stałego).

Siła Lorentza działająca na ładunki w przewodzie spowoduje gradient gęstości ładunku w kierunku prostopadłym zarówno do kierunku przewodnika jak i pola magnetycznego, zatem pojawi się w tym kierunku napięcie. Nazywamy to efektem Halla.

**24** Zakładając jednorodną gęstość prądu na całym przekroju przewodu, znajdź napięcie Halla (całkowita siła Lorentza działająca na ładunki musi wynosić  $\vec{0}$ ).

### 5.4 Magnetostatyka

Podobnie jak prawo Gaussa w elektrostatyce, prawo Ampere'a pozwala obliczać pole magnetyczne pochodzące od rozkładów prądu o wysokiej symetrii.

**25** Jakie pole magnetyczne wytwarza wokół siebie nieskończenie długi prosty przewód, przez który płynie prąd  $I$  ?

**26** Jakie pole magnetyczne wytwarza nieskończona zwojnica o  $n$  zwojach na jednostkę długości?

Dla przewodu o niesymetrycznym kształcie, można otrzymać wytwarzane przez niego pole całkując wkłady od fragmentów przewodnika:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}'(l))}{|\vec{r} - \vec{r}'(l)|^3} \quad (22)$$

Prawo to nosi nazwę *prawa Biotta-Savarta* i jest odpowiednikiem prawa Coulomba dla magnetostatyki.

## 5.5 Indukcja elektryczna

**27** Po dwóch szynach toczy się metalowa rura, prostopadła do szyn. Składowa pionowa pola magnetycznego pomiędzy szynami jest równa  $B$ . Jakie jest napięcie pomiędzy szynami? Jeżeli zewrzymy szyny przewodem z żarówką, powinna ona świecić - skąd żarówka pobiera energię do świecenia?

**28** Wytlumacz jakościowo zjawisko pojawiania się napięcia w powyższej sytuacji przez efekt Halla.

**29** Ramka z przerwą obraca się w polu magnetycznym. Jak zmienia się napięcie na przerwie? Jeżeli zewrzymy ramkę odbiornikiem, jaki moment przeciwdziałający ruchowi pojawi się na osi ramki? (prądnica).

## 5.6 Zasada zachowania ładunku

Biorąc obustronnie dywergencje w prawie Ampere'a i wykorzystując prawo Gaussa dostaniemy:

$$\nabla \cdot \vec{j} + \partial_t \rho = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \int_V \rho dV = 0 \quad (23)$$

(implikacja w drugą stronę dla obszarów jednorodnych) Równanie to mówi, że zmiana ładunku w jakimś obszarze jest równa jego wypływowi przez granicę obszaru - ładunek jest wielkością zachowaną. Równania tej postaci nazywamy równaniami ciągłości.

## Zasada zachowania energii

Znając pole  $\vec{E}$  i prądy  $\vec{j}$ , możemy policzyć pracę, jaką pole wykonuje nad materią:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \int_A \vec{E} \cdot \vec{j} dV = \int_A \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H} - \partial_t \vec{D}) dV = \int_A (\vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \nabla \cdot (\vec{H} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot \partial_t \vec{D}) dV \\ &= \int_A (-\vec{H} \cdot \partial_t \vec{B} - \vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} - \nabla \cdot (\vec{H} \times \vec{E})) dV \end{aligned}$$

przenosząc wszystko na jedną stronę dostajemy równanie:

$$\frac{dW}{dt} + \partial_t \frac{1}{2} \int_A (\vec{H} \cdot \vec{B} + \vec{E} \cdot \vec{D}) dV + \int_{\partial A} (\vec{H} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = 0 \quad (24)$$

równanie to ma postać równania ciągłości energii: wpływ energii do energii mechanicznej + zmiana energii pola + strumień energii przez brzeg obszaru jest zero. Wektor  $\vec{H} \times \vec{E}$  nazywamy wektorem Pointinga. Jest to wektor strumienia energii pola.

## 5.7 Równanie falowe

Podziałajmy rotacją na prawo Faradaya, a następnie skorzystajmy z równań materiałowych i prawa Gaussa. Dostaniemy

$$\Delta \vec{E} - \mu \epsilon \partial_t^2 \vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \nabla \rho + \mu \partial_t \vec{j} \quad (25)$$

jest to równanie falowe z prędkością fali  $1/\sqrt{\epsilon\mu} = c$ . Podobnie, działając rotacją na prawo Ampere'a:

$$\Delta \vec{B} - \mu \epsilon \partial_t^2 \vec{B} = \mu \nabla \times \vec{j} \quad (26)$$

## 5.8 Potencjały

Równanie (34) mówi, że forma  $B$  jest zamknięta. Jeżeli rozważamy elektrodynamikę na obszarze jednorodnym, musi to być różniczką pewnej 1-formy, nazwijmy ją  $A$ :

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad \left( \hat{B} = d\hat{A} \right) \quad (27)$$

Wstawiając to do prawa Faradaya dostaniemy, że forma  $E + \partial_t A$  jest zamknięta, zatem jest różniczką pewnej 0-formy  $-\phi$  ("-" ma znaczenie historyczne):

$$\vec{E} = -\nabla \phi - \partial_t \vec{A} \quad \left( \hat{E} = -d\hat{\phi} - \partial_t \hat{A} \right) \quad (28)$$

Pozostałe równania Maxwella przyjmą teraz postać:

$$\Delta V + \partial_t \nabla \cdot \vec{A} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (29)$$

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{A} - \nabla (\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t V) = -\mu_0 \vec{j} \quad (30)$$



Zauważmy, że transformacja potencjałów:

$$\begin{cases} \vec{A} \rightarrow \vec{A} + \nabla \lambda \\ V \rightarrow V - \partial_t \lambda \end{cases} \quad (31)$$

nie zmienia pól. Transformacje takie nazywa się transformacjami cechowania, a niezmienniczość równań Maxwella ze względu na te transformacje nazywa się symetrią cechowania. Można tak wybrać cechowanie, by  $\nabla \cdot \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \partial_t V$  (cechowanie Lorenza). Wybór ten prowadzi do szczególnie ładnej postaci równań (29,30):

$$\Delta V - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 V = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (32)$$

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \quad (33)$$

## 5.9 Geometryczna natura pola elektromagnetycznego

Do tej pory pola  $\vec{E}, \vec{H}, \vec{D}, \vec{B}$  i  $\vec{j}$  nazywaliśmy nieprecyzyjnie polami wektorowymi. Zauważmy jednak, że  $D, B$  i  $j$  wycalkowane po dwuwymiarowych rozmaitościach dają skalar, natomiast  $E$  i  $H$  dają skalar wycalkowane po jednowymiarowych rozmaitościach. Są one zatem odpowiednio dwuformami różniczkowymi i jednoformami różniczkowymi, powiązanych równaniami:

$$\begin{aligned} \bullet \int_{\partial V} \hat{D} &= \int_V \hat{\rho} & \bullet \int_{\partial V} \hat{B} &= 0 \\ \bullet \int_{\partial S} \hat{E} &= -\frac{d}{dt} \int_S \hat{B} & \bullet \int_{\partial S} \hat{H} &= \int_S \hat{j} + \frac{d}{dt} \int_S \hat{D} \end{aligned}$$

Dla pól bez osobliwości, twierdzenie Stokes'a daje równania Maxwella w postaci różniczkowej:

$$d\hat{D} = \hat{\rho} \quad (34) \qquad d\hat{B} = 0 \quad (36)$$

$$d\hat{E} = -\partial_t \hat{B} \quad (35) \qquad d\hat{H} = \hat{j} + \partial_t \hat{D} \quad (37)$$

Gęstość ładunku nazywaliśmy funkcją skalarną, ale jest tak naprawdę 3-formą różniczkową – dopiero całka po trójwymiarowym obszarze daje skalarną wielkość fizyczną, niezależną od układu współrzędnych - ładunek zawarty w obszarze.

Przestrzeń  $k$ -form antysymetrycznych nad  $\mathbb{R}^n$  jest  $\binom{n}{k}$ -wymiarowa, co oznacza że przestrzenie  $k$ -form i  $(n-k)$ -form antysymetrycznych mają ten sam wymiar. Jeżeli w  $\mathbb{R}^n$  mamy określoną dwuformę symetryczną (iloczyn skalarny), to można skonstruować izomorfizm pomiędzy tymi przestrzeniami, nazywany izomorfizmem Hodge'a. Izomorfizm ten przenosi się na izomorfizm pomiędzy  $k$ -formami różniczkowymi i  $(n-k)$ -formami różniczkowymi. Izomorfizm Hodge'a oznacza się przez  $\star$  i działa on na formach bazowych poprzez uzupełnianie:

$$\star(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) = \sum_{j_1, \dots, j_n} \frac{\sqrt{|\det g|}}{(n-k)!} g_{i_1 j_1} \cdots g_{i_k j_k} \epsilon_{j_1 \dots j_n} dx_{j_{k+1}} \wedge \cdots \wedge dx_{j_n} \quad (38)$$

Izomorfizm Hodge'a pozwala zapisać równania materiałowe:

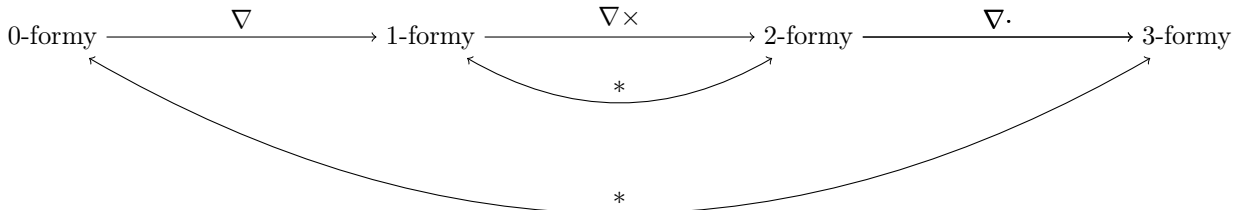
$$\star \hat{D} = \epsilon \hat{E} \quad (39)$$

$$\star \hat{B} = \mu \hat{H} \quad (40)$$

Jeżeli pola są określone w trójwymiarowej przestrzeni afinicznej ze standardowym iloczynem skalarnym, to izomorfizm Hodge'a i iloczyn skalarny pozwalają na utożsamienie jednoform i dwuform różniczkowych z polami wektorowymi:

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &\longleftrightarrow dz \longleftrightarrow \vec{e}_z, \\ dy \wedge dz &\longleftrightarrow dx \longleftrightarrow \vec{e}_x, \\ dz \wedge dx &\longleftrightarrow dy \longleftrightarrow \vec{e}_y, \end{aligned}$$

a operator różniczki zewnętrznej  $d$  staje się rotacją lub dywergencją, w zależności od tego czy pole pochodzi od jednoformy czy dwuformy (lub gradientem dla funkcji skalarnych czyli 0-form):



Natomiast jeżeli rozważamy niekartezjańskie współrzędne lub elektrodynamikę na rozmaitościach, trzeba pamiętać o geometrycznej naturze pól.

## 5.10 Zapis czterowymiarowy

Do tej pory traktowaliśmy czas jako niezależny parametr. Potraktujmy teraz  $x_0 = ct$  jako dodatkowy, zerowy wymiar. Zdefiniujmy dwie nowe 2-formy różniczkowe określone na czterowymiarowej rozmaitości:

$$\hat{F} = \frac{1}{c} dx_0 \wedge \hat{E} - \hat{B} \quad (41)$$

$$\hat{G} = \frac{1}{c} dx_0 \wedge \hat{H} + \hat{D} \quad (42)$$

i policzmy ich różniczki zewnętrzne:

$$d\hat{F} = -\frac{1}{c} dx_0 \wedge d\hat{E} - \frac{1}{c} dx_0 \wedge \partial_t \hat{B} - (\nabla \vec{B}) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \quad (43)$$

$$d\hat{G} = -\frac{1}{c} dx_0 \wedge d\hat{H} + \frac{1}{c} dx_0 \wedge \partial_t \hat{D} + (\nabla \vec{D}) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \quad (44)$$

Równania Maxwella można zapisać jako:

$$d\hat{F} = 0 \quad (45)$$

$$d\hat{G} = -\frac{1}{c} \hat{\mathbf{j}}, \quad (46)$$

gdzie  $\hat{\mathbf{j}}$  to 3-forma gęstości czteroprądu:  $\hat{\mathbf{j}} = dx_0 \wedge \hat{j} - c\hat{\rho}$ . Biorąc różniczkę zewnętrzną drugiego równania, otrzymujemy zasadę zachowania ładunku. Równania materiałowe możemy zapisać jako:  $-\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} * \hat{F} = \hat{G}$ . Zdefiniujmy 1-formę czteropotencjału:

$$\hat{\mathbf{A}} = \frac{1}{c} dx_0 \wedge \hat{\phi} - \hat{A} \quad (47)$$

łatwo sprawdzić, że  $d\hat{\mathbf{A}} = \hat{F}$ . Potencjał jest określony z dokładnością do transformacji cechowania  $\hat{\mathbf{A}} \rightarrow \hat{\mathbf{A}} + d\hat{\lambda}$ .

Składowe form  $*\hat{F}$ ,  $*\hat{G}$  i  $*\hat{\mathbf{j}}$  można zapisać w macierzach:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -\frac{1}{c}E_z & \frac{1}{c}E_y \\ -B_y & \frac{1}{c}E_z & 0 & -\frac{1}{c}E_x \\ -B_z & -\frac{1}{c}E_y & \frac{1}{c}E_x & 0 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 & -D_x & -D_y & -D_z \\ D_x & 0 & -\frac{1}{c}H_z & \frac{1}{c}H_y \\ D_y & \frac{1}{c}H_z & 0 & -\frac{1}{c}H_x \\ D_z & -\frac{1}{c}H_y & \frac{1}{c}H_x & 0 \end{bmatrix} \quad j = \begin{bmatrix} c\rho \\ j_x \\ j_y \\ j_z \end{bmatrix} \quad (48)$$

W tej notacji, równania Maxwella zapisujemy jako:

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0 \quad \frac{\partial G^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = -\frac{1}{c} j^\mu \quad (49)$$

Składowe potencjału  $\hat{\mathbf{A}}$  układamy w jednowymiarową macierz  $A = [\phi/c, A_x, A_y, A_z]^T$ . Wyrazy macierzy  $G$  otrzymujemy z czteropotencjału:

$$G^{\mu\nu} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \left( \sum_\lambda \eta^{\mu\lambda} \frac{\partial A^\nu}{\partial x^\lambda} - \sum_\lambda \eta^{\nu\lambda} \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\lambda} \right) \quad (50)$$

przy pomocy stałej macierzy  $\eta = \text{diag}\{1, -1, -1, -1\}$ . Równania Maxwella wyrażają się przez potencjały następująco:

$$\sum_{\mu,\lambda} \eta^{\mu\lambda} \frac{\partial^2 A^\nu}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} - \sum_{\mu,\lambda} \eta^{\nu\lambda} \frac{\partial^2 A^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} = -\mu_0 j^\mu \quad (51)$$

Drugi składnik możemy wyeliminować, ustalając cechowanie Lorenza:  $\partial_\mu A^\mu = 0$ . Wtedy równania Maxwella przyjmą prostą postać:

$$\square A^\nu \stackrel{df}{=} \sum_{\mu,\lambda} \eta^{\mu\lambda} \frac{\partial^2 A^\nu}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} = -\mu_0 j^\nu, \quad (52)$$

dokładnie tę samą, którą podają równania (32,33).

## Lagrangian pola elektromagnetycznego

Określmy gęstość funkcjonału  $\mathcal{L}(A^\mu)$  wzorem:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\epsilon_0} \sum_{\alpha,\beta} G_{\alpha\beta} G^{\alpha\beta} - \sum_\nu j_\nu A^\nu = -\frac{1}{4\mu_0} \sum_{\alpha,\beta} \sum_\lambda \left( \eta_{\alpha\lambda} \frac{\partial A^\lambda}{\partial x^\beta} - \eta_{\beta\lambda} \frac{\partial A^\lambda}{\partial x^\alpha} \right) \sum_\lambda \left( \eta^{\beta\lambda} \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\lambda} - \eta^{\alpha\lambda} \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\lambda} \right) - \sum_{\nu,\mu} j^\nu \eta_{\nu\mu} A^\mu. \quad (53)$$

**30** Sprawdź, że równania L-E dla funkcjonału  $\int_{T \times V} \mathcal{L} dt dV$  to równania Maxwella (51).

Pełne działanie dla cząstki o masie  $m$  i ładunku  $q$  oddziałującej z polem elektromagnetycznym:

$$S = -\frac{1}{4\epsilon_0} \int_{T \times V} \sum_{\alpha, \beta} G_{\alpha\beta} G^{\alpha\beta} dt dV - q \int_T A^0(t, \vec{x}) dt + q \int_T \sum_{\mu=1}^3 \dot{x}^\mu A^\mu(t, \vec{x}) dt + \frac{m}{2} \int_T \sum_{\mu=1}^3 (\dot{x}^\mu)^2 dt. \quad (54)$$

Pochodna funkcjonalna po  $A^\mu$  daje równania Maxwella. Pochodna po  $x^\mu$  daje równania Newtona z energią potencjalną  $qA^0$ , a potencjał wektorowy modyfikuje pęd. Pęd nie jest już równy  $m\dot{x}$ , ale otrzymuje wkład  $m \frac{e}{c} A^\mu$  od sił magnetycznych.

Równania Maxwella, a przez to powyższy Lagrangian, nie są niezmiennicze na transformacje Galileusza. Okazuje się, że należy zmodyfikować Lagrangian cząstki, by uzgodnić go z symetriami elektromagnetyzmu. Macierz  $\eta$ , która pojawiła się w równaniu (50) i pośrednio w równaniu (48) odpowiada za geometrię czasoprzestrzeni - rozmaitości którą stanie się  $T \times V$ .

Jeżeli wyrazimy gęstość Lagrangianu przez pola  $\vec{E}$  i  $\vec{B}$ , to otrzymamy:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\epsilon_0 E^2 - \frac{1}{\mu_0} B^2) - \rho\phi + \vec{j} \cdot \vec{A} = \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 (\nabla\phi + \partial_t \vec{A})^2 - \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{A})^2 \right) - \rho\phi + \vec{j} \cdot \vec{A} \quad (55)$$

Możemy stąd obliczyć gęstość pędu:  $\vec{p} = -\vec{D}$  i przejść do gęstości Hamiltonianu:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\epsilon_0} D^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) + \rho\phi - \vec{j} \cdot \vec{A} + \vec{D} \cdot \vec{\nabla}\phi \quad (56)$$

**Zasada zachowania ładunku z niezmienniczości na transformacje cechowania** Jeżeli wykonamy transformację cechowania:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda, \quad (57)$$

to spowoduje to zmianę działania w obszarze  $T \times V$  o:

$$\delta S = \int_{T \times V} j^\mu \partial_\mu \lambda dt dV. \quad (58)$$

Ponieważ równania Maxwella są niezmiennicze na cechowania, zmiana ta powinna wynosić zero. Ograniczmy się do podgrupy cechowań znikających dla  $t = \pm\infty$ . Mamy wtedy:

$$\delta S = \int_{T \times V} \partial_\mu (j^\mu \lambda) dt dV - \int_{T \times V} (\partial_\mu j^\mu) \lambda dt dV = \int_{T \times V} (\partial_t (\rho\lambda) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{j}\rho)) dt dV - \int_{T \times V} (\partial_\mu j^\mu) \lambda dt dV \quad (59)$$

Z twierdzenia Stokesa:

$$\delta S = \int_V (\rho\lambda) dV \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_T \int_{\partial V} (\vec{j}\rho) \cdot d\vec{S} dt - \int_{T \times V} (\partial_\mu j^\mu) \lambda dt dV. \quad (60)$$

Oba pierwsze składniki znikają (z założenia:  $\lambda \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0$  i ze znikania prądów w nieskończoności przestrzennej). Ostatni składnik powinien być równy 0 dla dowolnego wyboru  $\lambda$ , zatem  $\partial_\mu j^\mu = 0$ .

## 6 Szczególna teoria względności

### 6.1 Symetrie czasoprzestrzeni

Na początek rozważmy dwuwymiarową czasoprzestrzeń  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  z jednym wymiarem przestrzennym i zastanówmy się, jak wygląda ruch w różnych inercjalnych układach odniesienia. Układy inercjalne poruszają się względem siebie ruchem jednostajnym prostoliniowym. Jest to relacja przechodnia - ruch jednostajny prostoliniowy jest dalej ruchem jednostajnym prostoliniowym w innym układzie inercjalnym. Linia prosta w jednym UI jest prosta w innym UI. Transformacje między UI powinny być zatem odwzorowaniami afinicznymi. Będzie to pewna dwuwymiarowa reprezentacja macierzowa grupy  $(\mathbb{R}, +)$ .

Macierz  $A(v)$  powinna transformować ruch z prędkością  $v$  w spoczynek:

$$A(v) \begin{bmatrix} t \\ vt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix},$$

co implikuje, że  $a_{21}(v) = -va_{22}(v)$ . Zapiszmy zatem macierz  $A(v)$  jako

$$A(v) = \gamma(v) \begin{bmatrix} a(v) & b(v) \\ -v & 1 \end{bmatrix}$$

Z własności grupowej mamy:  $A(v)A(-v) = I$ , co daje:  $a(v) = 1, b(-v) = -b(v), \gamma(v)\gamma(-v)(1 + vb(v)) = 1$ . Ostatni wynik można przepisać jako:

$$\tilde{\gamma}(v)\tilde{\gamma}(-v) = 1, \quad (61)$$

gdzie  $\tilde{\gamma} = \gamma(v)\sqrt{1 + vb(v)}$ .

Złożenie dwóch transformacji w prędkościami  $v_1$  i  $v_2$  daje transformację o macierzy:

$$\gamma(v_1)\gamma(v_2) \begin{bmatrix} 1 - v_2b(v_1) & b(v_2) + b(v_1) \\ -v_1 - v_2 & 1 - v_1b(v_2) \end{bmatrix}.$$

jeżeli macierz ta ma spełniać ograniczenia wyprowadzone do tej pory, po pierwsze elementy diagonalne muszą być sobie równe, co daje

$$\forall v_1 \forall v_2 \quad b(v_1)v_2 = v_1b(v_2).$$

Jedyną funkcją która to spełnia jest funkcja liniowa, zatem  $b(v) = Bv$  dla pewnego  $B$ . Po drugie, element diagonalny musi być elementem diagonalnym innej macierzy szukanej postaci, zatem

$$\forall v_1 \forall v_2 \quad \gamma(v_1)\gamma(v_2)(1 - Bv_1v_2) = \gamma(v_1 \oplus v_2), \quad (62)$$

gdzie  $\oplus$ , zdefiniowane jako  $v_1 \oplus v_2 = (v_1 + v_2)/(1 + Bv_1v_2)$ , jest pewnym działaniem przemienne (widać od razu) i łącznym. Przepiszmy (62) używając wielkości  $\tilde{\gamma}(v_1)$  i  $\tilde{\gamma}(v_2)$ :

$$\tilde{\gamma}(v_1)\tilde{\gamma}(v_2) = \gamma(v_1 \oplus v_2) \sqrt{1 + B \left( \frac{v_1 + v_2}{1 - Bv_1v_2} \right)^2} = \tilde{\gamma}(v_1 \oplus v_2) \quad (63)$$

Pokazaliśmy do tej pory ((61) i (63)), że funkcja  $\tilde{\gamma}$  jest homomorfizmem grup  $(\mathbb{R}, \oplus)$  i  $(\mathbb{R}, \cdot)$ . Chcielibyśmy sklasyfikować wszystkie takie homomorfizmy. Możliwe są trzy przypadki wartości  $B$ .

Najprostszym przypadkiem jest  $B = 0$ . Wtedy dodawanie prędkości jest standartowym dodawaniem prędkości, a zmienna czasowa nie podlega transformacji (równoczesność dwóch zdarzeń nie jest subiektywna, istnieje niezależne od obserwatora rzutowanie na oś czasową, czasoprzestrzeń ma strukturę wiązki). Grupa ta nazywa się grupą Galileusza i jest izomorficzna z  $(\mathbb{R}, +)$ .

Rozważmy przypadek  $B > 0$ . Możemy wtedy wprowadzić oznaczenie  $B = 1/c^2$ . Wzór na dodawanie prędkości przyjmie wtedy postać  $\frac{1}{c}(v_1 \oplus v_2) = \frac{v_1/c + v_2/c}{1 - (v_1/c)(v_2/c)}$ . Zauważmy, że wprowadzając oznaczenie  $\text{tg } \alpha = v/c$ , dostaniemy  $\frac{1}{c}(v_1 \oplus v_2) = \text{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)$ , zatem funkcja  $\alpha \mapsto c \text{tg } \alpha$  jest izomorfizmem grup  $(\mathbb{R}, +)$  i  $(\mathbb{R}, \oplus)$  i mamy następujący diagram komutujący:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, +) & \xrightarrow{\text{tg}} & (\mathbb{R}, \oplus) \\ & \searrow a^x & \downarrow \tilde{\gamma} \\ & & (\mathbb{R}, \cdot) \end{array}$$

Mamy zatem  $\tilde{\gamma}(v) = a^{\arctg(v/c)}$ . Jednocześnie chcielibyśmy, by nasza przestrzeń była izotropowa (prawo składania nie powinno się zmieniać po transformacji  $x \mapsto -x$ ), więc  $\tilde{\gamma}$  powinna być funkcją parzystą - jedyną możliwością jest homomorfizm trywialny  $\tilde{\gamma} = 1$ , stąd mamy  $\gamma(v) = 1/\sqrt{1 + v^2/c^2}$ . Ostatecznie dostajemy wzór na macierz transformacji:

$$A(v) = \frac{1}{\sqrt{1 + (v/c)^2}} \begin{bmatrix} 1 & v/c^2 \\ -v & 1 \end{bmatrix} \quad (64)$$

którą możemy zapisać jako:

$$\begin{bmatrix} 1/c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+(v/c)^2}} & \frac{v/c}{\sqrt{1+(v/c)^2}} \\ -\frac{v/c}{\sqrt{1+(v/c)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+(v/c)^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dla kąta  $\alpha$  określonego jak poprzednio wzorem  $\tan \alpha = v/c$ , zatem dla  $B > 0$  dostajemy grupę obrotów  $SO(2)$ .

Jeżeli  $B < 0$ , możemy je zapisać jako  $B = -1/c^2$  i otrzymamy:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1/c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & \frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \\ \frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -1/c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh \alpha & \sinh \alpha \\ \sinh \alpha & \cosh \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (65)$$

dla parametru  $\alpha$  określonego wzorem  $\tanh \alpha = v/c$ . Dla  $B < 0$  mamy grupę obrotów hiperbolicznych  $SO(1, 1)$ .

W czasoprzestrzeni czterowymiarowej będą to odpowiednio grupy  $(\mathbb{R}^3, +) \rtimes SO(3)$  (Galileusza),  $SO(4)$  oraz  $SO(1, 3)$  (Lorenza). Jeżeli uwzględnimy translacje przestrzenne i czasowe uzyskamy grupy  $(\mathbb{R}^4, +) \rtimes ((\mathbb{R}^3, +) \rtimes SO(3))$  (Galileusza),  $(\mathbb{R}^4, +) \rtimes SO(4)$  oraz  $(\mathbb{R}^4, +) \rtimes SO(1, 3)$  (Poincaré).

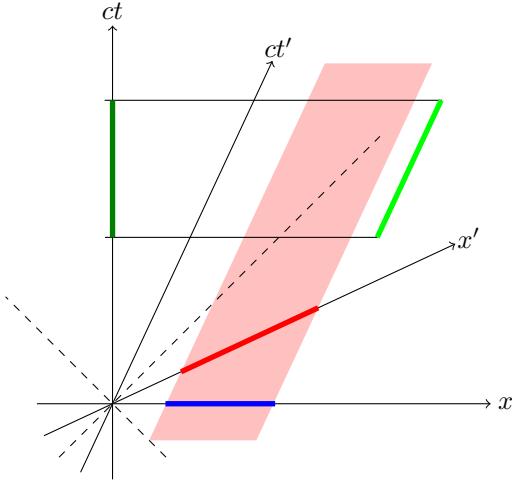
## 6.2 Kinematyka relatywistyczna

Rozważmy dwa układy odniesienia poruszające się względem siebie. Tak je zorientujemy, by ich osie  $x$  i  $x'$  były skierowane wzdłuż kierunku prędkości względnej. Relatywistyczne prawo transformacji do układu poruszającego się wyraża wzór:

$$\begin{cases} x' = \gamma x + \gamma v t \\ t' = \gamma t + \gamma \frac{v}{c^2} x \end{cases} \quad (66)$$

w przeciwieństwie do transformacji Galileusza:  $x' = x + vt$ ,  $t' = t$ . Czasoprzestrzeń Galileusza ma strukturę wiązki - jednoczesność zdarzeń jest obiektywna. W czasoprzestrzeni Minkowskiego dla dwóch zdarzeń zawsze istnieje układ odniesienia, w którym zachodzą one w tym samym miejscu albo są równoczesne. Równoczesność jest względna, mamy strukturę rozmaitości.

Czas w układzie poruszającym się płynie wolniej, a obiekty podlegają skróceniu wzdłuż kierunku ruchu. Dwóch mijających się obserwatorów trzymających identyczne pręty zauważy, że pręt drugiego jest krótszy.



Rysunek 1: Układ odniesienia spoczywający  $(x, ct)$  i układ  $(x', ct')$  poruszający się względem niego z ujemną prędkością. Pręt czerwony, spoczywający w układzie ruchomym, jest widziany w układzie nieruchomym jako krótszy. Odcinek czasu w układzie poruszającym się, jest widziany jako krótszy z zewnątrz. Linia przerywana to granica stożka świetlnego.

Metodą, by zmieścić w garażu dłuższą od niego drabinę, jest wbiec do niego z drabiną odpowiednio szybko. Z drugiej strony, z punktu widzenia drabiny, garaż będzie krótszy niż gdyby był w spoczynku, zatem sytuacja będzie jeszcze gorsza. Rozwiązać paradoks rysując diagram czasoprzestrzenny.

Na skutek promieniowania kosmicznego w górnych warstwach atmosfery tworzą się nietrwałe cząstki o prędkości bliskiej prędkości światła. Są one rejestrowane na Ziemi, ponieważ w ich układzie odniesienia czas płynie wolniej i nie zdążą się rozpaść (z ich punktu widzenia czas płynie normalnie, ale odległość do Ziemi się skraca).

## 7 Ogólna teoria względności

### 7.1 Rozmaitości Riemannowskie

Rozmaitość różniczkowalna  $M$  nad  $\mathbb{R}^n$  nie definiuje odległości między punktami (różniczkowanie) ani miary (całkowanie). Możemy to mieć zewnętrźnie, jeżeli znamy zanurzenie rozmaitości w  $\mathbb{R}^m$  (metryka i miara indukowane z  $\mathbb{R}^m$ ), lub wewnątrz - wprowadzając funkcję różniczkowalną  $g$  przypisującą każdemu punktowi rozmaitości dwuformę kwadratową na przestrzeni stycznej (tensor metryczny). Rozmaitość różniczkowalną wyposażoną w tensor metryczny nazywamy rozmaitością Riemanna.

Wybierając lokalny UW  $\xi : \mathbb{R}^n \rightarrow M \subset \mathbb{R}^m$  w każdym punkcie  $x \in M$  przestrzeń styczna  $T_x$  ma naturalną bazę  $e_i(x) = \partial_{x_i} \xi(x)$  i tensor metryczny staje się macierzą o wyrazach będących funkcjami współrzędnych. W każdym punkcie rozmaitości tensor ten ustala izomorfizm pomiędzy przestrzenią  $T_x$  wektorów stycznych, a przestrzenią  $T_x^*$  jednoform. Przez  $g_{\alpha\beta}(x)$  oznaczamy współrzędne tensora metrycznego w punkcie  $x$ , a przez  $g^{\alpha\beta}(x)$  współrzędne tensora odwrotnego.

Policzmy pochodną pola wektorowego  $V : M \rightarrow TM$  wzdłuż współrzędnej  $x^\beta$ :

$$\begin{aligned} \partial_{x^\beta} V &= \partial_{x^\beta} \left( \sum_{\alpha} V^{\alpha} e_{\alpha} \right) = \sum_{\alpha} (\partial_{x^\beta} V^{\alpha}) e_{\alpha} + V^{\alpha} \partial_{x^\beta} e_{\alpha} \stackrel{df}{=} \sum_{\alpha} (\partial_{x^\beta} V^{\alpha}) e_{\alpha} + \sum_{\alpha\mu} V^{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} e_{\mu} \\ &= \sum_{\alpha} \left( \partial_{x^\beta} V^{\alpha} + \sum_{\mu} V^{\mu} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \right) e_{\alpha} \end{aligned} \quad (67)$$

obok znanego z płaskiej geometrii pierwszego czynnika, pojawia się drugi czynnik. Wielkości  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$  ( $\mu$ -ta składowa pochodnej po współrzędnej  $x^\beta$  wektora  $e_{\alpha}$  bazy przestrzeni stycznej) nazywają się symbolami Christoffela. Drugi składnik zapewnia prawdziwość wzoru we wszystkich lokalnych UW.

Zapominając o zmienności bazy lokalnej, w danej parametryzacji mamy po prostu  $n$  funkcji skalarnych  $V^{\alpha}$ , dla których można liczyć pochodne cząstkowe. Pochodną cząstkową zapisujemy po przecinku. Z drugiej strony, jeżeli funkcje te są współrzędnymi pola wektorowego, do pochodnej pola wchodzi również składnik od zmienności bazy lokalnej, jak w równaniu (67). Pochodną tę zapisujemy ze średnikiem i nazywamy pochodną kowariantną. Równanie (67) możemy zapisać jako

$$V_{;\beta}^{\alpha} = V_{,\beta}^{\alpha} + \sum_{\mu} V^{\mu} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \quad (68)$$

Z przemienności pochodnych cząstkowych mamy  $\partial_i e_j = \partial_j e_i$ , a stąd  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ . Zauważmy, że  $e_i \cdot e_j = g_{ij}$ . Korzystając z tych obserwacji można pokazać (**ćwiczenie**), że

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\gamma\mu} (g_{\gamma\alpha,\beta} + g_{\gamma\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\gamma}) \quad (69)$$

W danym punkcie zawsze możemy znaleźć współrzędne, w których tensor metryczny  $g_{\mu,\nu}$  jest diagonalny z wartościami na diagonalu  $\pm 1$  (układ lokalnie płaski). W lokalnie płaskim UW przy całkowaniu Jakobian parametryzacji wynosi 1. W dowolnym UW wynosi on (**ćwiczenie**)  $\sqrt{|\det g|}$

### 7.2 Geodezyjne i krzywizna

Rozważmy krzywą  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ . Jej wektorem stycznym jest  $u^{\beta} = \frac{d}{d\lambda} \gamma^{\beta}$ . Wektor  $v^{\alpha}$  jest przenoszony równolegle wzdłuż krzywej, jeżeli  $\frac{d}{d\lambda} v^{\alpha} = \sum_{\beta} u^{\beta} v_{;\beta}^{\alpha} = 0$ , w szczególności wektor styczny jest przenoszony równolegle gdy

$$u^{\beta} u_{;\beta}^{\alpha} = u^{\beta} u_{,\beta}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} u^{\mu} u^{\nu} = 0 \quad (70)$$

$$\frac{d^2}{d\lambda^2} x^{\alpha} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda} = 0 \quad (71)$$

Powyższe równanie można również otrzymać jako równanie E-L dla funkcjonału  $\gamma \rightarrow \int_{\gamma} |g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}|^{1/2}$  (**ćwiczenie**, ważne by w minimalizacji ograniczyć się do krzywych parametryzowanych *parametrem afinicznym*, tzn.  $g_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu} = \text{const}$ ). Krzywa przenosząca równolegle swój wektor styczny jest jednocześnie krzywą o minimalnej długości. Krzywe takie nazywamy geodezyjnymi. Są to odpowiedniki linii prostych w przestrzeni płaskiej.

W pewnym lokalnym UW wybierzmy dwie współrzędne  $x^1, x^2$  i rozważmy figurę ograniczoną czterema łukami o stałych wartościach współrzędnych (jedna para przeciwległych ma stałe wartości  $x^1$  równe  $a$  i  $a + \Delta a$ , druga para ma stałe wartości  $x^2$  równe  $b$  i  $b + \Delta b$ ). Pytamy co się stanie z wektorem, gdy przeniesiemy go równolegle po takiej pętli - interesuje nas różnica wektora na początku i na końcu operacji (w najniższym rzędzie rozwinięcia). Okazuje się, że

$$\Delta V^{\alpha} = \Delta a \Delta b R_{12\beta}^{\alpha} V^{\beta},$$

gdzie  $R_{\beta\sigma\lambda}^{\alpha} = \Gamma_{\beta\lambda,\sigma}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\sigma,\lambda}^{\alpha} + \Gamma_{\gamma\sigma}^{\alpha} \Gamma_{\beta\lambda}^{\gamma} - \Gamma_{\gamma\lambda}^{\alpha} \Gamma_{\beta\sigma}^{\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} (g_{\mu\lambda,\beta\sigma} - g_{\mu\sigma,\beta\lambda} + g_{\beta\sigma,\alpha\lambda} - g_{\beta\lambda,\alpha\sigma})$  jest nazywany tensorem Riemanna. W płaskiej przestrzeni jego wszystkie składowe wynoszą 0, zatem jest on miarą krzywizny rozmaitości. Co ciekawe, komutator dwóch pochodnych kowariantnych jest równy:  $[\nabla_{\alpha}, \nabla_{\beta}] V^{\mu} = R_{\nu\alpha\beta}^{\mu} V^{\nu}$ , zatem krzywizna jest jednoznacznie związana z niekomutowaniem pochodnych kowariantnych.

### 7.3 Zasada równoważności

Masa grawitacyjna = masa bezwładna. Wszystkie ciała spadają z tym samym przyspieszeniem - po przejściu do układu swobodnie spadającego lokalnie układ jest inercjalny i torami są linie proste. Globalnie - liniami są linie geodezyjne, lokalnie przestrzeń jest płaska i są to linie proste.

Pole grawitacyjne zakrzywia czasoprzestrzeń. W płaskiej przestrzeni Minkowskiego cząstki nieoddziałujące poruszają się po liniach prostych wewnątrz stożka świetlnego - geodezyjnych czasowych w płaskiej przestrzeni. W przestrzeni zakrzywionej cząstki będą poruszały się po liniach geodezyjnych względem nowej metryki. To że linie świata nie są liniami prostymi, co tłumaczmy działaniem sił grawitacji, teraz tłumaczmy tym że są to linie geodezyjne na zakrzywionej czasoprzestrzeni.

### 7.4 Energia, pęd i gęstość pędu

Czteropędność to wektor styczny do linii świata cząstki. Wyraża się wzorem:  $u^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}[1, v_x, v_y, v_z]$  lub  $u_\mu = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}[c^2, v_x, v_y, v_z]$ . Czteropęd to (podobnie jak pęd cząstki swobodnej)  $p_\mu = mu_\mu$ . Jego pierwszą składową jest energia cząstki (einsteinowska równoważność masy i energii mówi, że energia spoczywającej cząstki o masie  $m$  jest równa  $mc^2$ ), a pozostałe trzy składowe to składowe pędu. Rozwijając w szereg energię, otrzymamy energię spoczynkową i energię kinetyczną.

### 7.5 Równania Einsteina

W teorii Newtona pole grawitacyjne jest opisane równaniem analogicznym do równania Gaussa (Poissona):

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho, \quad (72)$$

gdzie  $\rho$  jest gęstością masy. Relatywistycznie, gęstość masy zależy od obserwatora i skaluje się przy zmianie układu odniesienia przez czynnik  $(1 - \frac{v^2}{c^2})$  - jest zatem wyrazem pewnego tensora drugiego rzędu, który powinien ją zastąpić w relatywistycznym uogólnieniu tego równania - jest to tzw. tensor energii-pędu o własności  $T_{;\beta}^{\alpha\beta} = 0$ :

$$T^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \rho & p^x & p^y & p^z \\ p^x & P^x & \sigma^{xy} & \sigma^{zx} \\ p^y & \sigma^{xy} & P^y & \sigma^{yz} \\ p^z & \sigma_{zx} & \sigma_{yz} & P^z \end{bmatrix}, \quad (73)$$

gdzie  $\rho$  to wspomniana gęstość energii,  $p^i$  to składowe gęstości pędu,  $P^i$  to ciśnienia, a  $\sigma_{ij}$  to naprężenia ścinające. Do całkowitego tensora energii-pędu mają wkład cząstki materialne i pola.

Podobnie lewa strona równania powinna przejść w dwu-kontrawariantny tensor kodujący krzywiznę czasoprzestrzeni - powinien on również posiadać własność  $G_{;\beta}^{\alpha\beta} = 0$ .

Zwężając tensor Riemanna otrzymujemy tensor Ricciego:  $R_{\alpha\beta} \stackrel{df}{=} R_{\alpha\mu\nu}^\mu$ . Dalej, zwężając z tensorem metrycznym definiujemy skalar Ricciego:  $R \stackrel{df}{=} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ . Z tensora Ricciego i skalaru Ricciego tworzymy tensor Einsteina:  $G^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R = G^{\beta\alpha}$ . Ma on własność  $G_{;\beta}^{\alpha\beta} = 0$  i on wchodzi do lewej strony równania:

$$G^{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\alpha\beta} \quad (74)$$

Stałą proporcjonalności dobieramy tak, by dla słabych pól przejść do prawa Gaussa.

### 7.6 Granica słabego pola

Jeżeli pole grawitacyjne jest słabe, to metryka jest bliska metryce płaskiej czasoprzestrzeni:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

Obliczamy tensor Riemanna z dokładnością do wyrazów pierwszego rzędu w  $h$ , następnie tensor Ricciego, skalar Ricciego i ostatecznie tensor Einsteina, który po odpowiedniej zmianie współrzędnych (na takie w których  $h_{;\beta}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}h_{,\beta}$ ) przyjmie postać:

$$G^{\beta\nu} = -\frac{1}{2}\square(h^{\beta\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\beta\nu}\text{Tr}h), \quad (75)$$

(gdzie  $h_\mu^\mu = \text{Tr}h$ ), a równanie Einsteina przyjmie postać:

$$\square(h^{\beta\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\beta\nu}\text{Tr}h) \stackrel{df}{=} \square\bar{h}^{\beta\nu} = -16\pi\frac{G}{c^4}T^{\beta\nu} \quad (76)$$

**Granica nierelatywistyczna.** Gdy prędkości ciał są małe w porównaniu z  $c$ , jak np. w Układzie Słonecznym, to  $\bar{h}^{00}$  dominuje pozostałe składowe  $\bar{h}$ , które w granicy małych prędkości uznajemy za równe 0. W równaniu Einsteina  $\square \rightarrow -\nabla^2$ . Równanie Einsteina redukuje się do równania na jedną składową:  $\nabla^2 \bar{h}^{00} = 16\pi G/c^4(\rho c^2)$ . Porównując to z prawem Newtona (zapisanym w postaci prawa Gaussa), widzimy, że utożsamiamy potencjał grawitacyjny z  $\phi = \bar{h}^{00}c^2/4$ .

Żeby znaleźć tensor  $h$ , najpierw zauważmy, że  $\text{Tr}h = -\text{Tr}\bar{h} = -\frac{4}{c^2}\phi$ . Widzimy, że pozadiagonalne wyrazy  $h$  są zerami. Dla wyrazów diagonalnych zachodzi  $h^{\alpha\alpha} = \frac{2}{c^2}\phi$ . Ostatecznie dostajemy metrykę

$$ds^2 = (1 + \frac{2}{c^2}\phi) d(ct)^2 - (1 - \frac{2}{c^2}\phi)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (77)$$

Możemy teraz obliczyć współczynniki  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ . Ponieważ tensor metryczny jest diagonalny, przynajmniej dwa współczynniki muszą być równe by  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$  było niezerowe. Obliczamy:

$$\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha \approx \frac{1}{c^2}\eta^{\alpha\alpha}\partial_\alpha\phi \quad (78)$$

$$\alpha \neq \beta \Rightarrow \Gamma_{\beta\beta}^\alpha \approx -\frac{1}{c^2}\eta^{\alpha\alpha}\partial_\alpha\phi \quad (79)$$

$$\alpha \neq \beta \Rightarrow \Gamma_{\beta\alpha}^\beta = \Gamma_{\alpha\beta}^\beta \approx \frac{1}{c^2}\eta^{\beta\beta}\partial_\alpha\phi \quad (80)$$

Równanie cząstki swobodnie spadającej, to równanie geodezyjnej (70), w którym parametr afiniczny jest czasem własnym, a wektorem stycznym jest czteroprędkość w układzie  $(ct, x, y, z)$ :  $u^\alpha = \gamma[c, v_x, v_y, v_z]$ . Zapiszmy równanie dla składowej  $x^1$  na geodezyjnej:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\tau}u^1 + \Gamma_{\alpha\alpha}^1 u^\alpha u^\alpha + 2u^1 \sum_{\alpha \neq 1} \Gamma_{1\alpha}^1 u^\alpha \\ &= \frac{d}{d\tau}u^1 + \frac{1}{c^2}\partial_1\phi((u^0)^2 - (u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2) - \frac{2}{c^2}u^1(\partial_0\phi u^0 + \partial_2\phi u^2 + \partial_3\phi u^3) \\ &= \frac{d}{d\tau}u^1 + \frac{1}{c^2}\partial_1\phi(u_\alpha u^\alpha) - \frac{2}{c^2}\partial_1\phi((u^2)^2 + (u^3)^2) - \frac{2}{c^2}u^1(\partial_0\phi u^0 + \partial_2\phi u^2 + \partial_3\phi u^3) \\ &\approx \frac{d}{d\tau}u^1 + \partial_1\phi = 0 \end{aligned} \quad (81)$$

(pozostałe wyrazy są dzielone przez wyższe potęgi  $c$ , zatem są pomijalnie małe w przybliżeniu małych prędkości). Pomnożmy równanie przez  $m$ :

$$\frac{d}{d\tau}(mu^1) \approx \frac{d}{dt}p_x = -\partial_1(m\phi) = F_x \quad (82)$$

(zgodnie ze wzorem na siłę grawitacji). Podobnie będzie dla pozostałych składowych przestrzennych. Otrzymaliśmy drugą zasadę dynamiki Newtona.

**Fale grawitacyjne** W pustej przestrzeni równanie falowe (76) ma postać  $\square \bar{h}^{\beta\nu} = 0$ . Bazą jego rozwiązań są funkcje  $\bar{h}^{\beta\nu} = A^{\beta\nu}e^{k_\alpha x^\alpha}$ , dla  $k_\alpha k^\alpha = 0$ . Prędkość fali wynosi  $c$ .

Odległość między cząstkami będzie oscylować, mimo że nie zmieniają one położenia. Jeżeli będą to dwa lustra ze stojącą falą elektromagnetyczną pomiędzy nimi, może się zmienić warunek konstruktywnej interferencji. Zjawisko to jest podstawą eksperymentów wykrywających fale grawitacyjne.

## 7.7 Rozwiązanie Schwarzschilda

Wprowadźmy w części przestrzennej rozmaitości współrzędne sferyczne

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned}$$

W płaskiej przestrzeni tensor metryczny ma postać  $ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$  (**ćwiczenie**).

W każdym punkcie rozmaitości jest określona przestrzeń styczna, której naturalną bazą są wektory  $\{\vec{e}_t, \vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_\theta\}$ . W tej bazie są określone składowe symetrycznego tensora metrycznego:

$$\begin{bmatrix} g_{tt} & g_{tr} & g_{t\phi} & g_{t\theta} \\ g_{rt} & g_{rr} & g_{r\phi} & g_{r\theta} \\ g_{\phi t} & g_{\phi r} & g_{\phi\phi} & g_{\phi\theta} \\ g_{\theta t} & g_{\theta r} & g_{\theta\phi} & g_{\theta\theta} \end{bmatrix} \quad (83)$$



Poszukujemy rozwiązania statycznego i sferycznie symetrycznego. Składowe tensora nie mogą zależeć od  $\theta, \phi$  ani  $t$ . Co więcej zmiana kierunku czasu zmiana znaku  $\phi$  ani zmiana znaku  $\theta$  nie mogą zmienić postaci tensora (na mocy stacjonarności i sferycznej symetryczności). Tensor jest zatem diagonalny, a jego współrzędne zależą tylko od  $r$ . Element długości na rozmaitości jest zatem równy:

$$ds^2 = g_{tt} dt^2 + g_{rr} dr^2 + g_{\phi\phi} d\phi^2 + g_{\theta\theta} d\theta^2 \quad (84)$$

Niezmienniczość na obroty powoduje, że  $g_{\phi\phi} = \sin^2 \theta g_{\theta\theta}$ . Przeparametryzujemy współrzędną  $r$  tak, by  $g_{\theta\theta} = r^2$  (tak jak dla płaskiej przestrzeni). Zostają nam dwa stopnie swobody:  $g_{rr}$  i  $g_{tt}$ . Tensor odwrotny ma na diagonalu  $1/g_{tt}$ ,  $1/g_{rr}$ ,  $1/r^2 \sin^2 \theta$ ,  $1/r^2$

Policzmy symbole Christoffela (**ćwiczenie**):

$$\begin{aligned} \Gamma_{rt}^t = \Gamma_{tr}^t &= \frac{g'_{tt}}{2g_{tt}} & \Gamma_{tt}^r &= -\frac{g'_{tt}}{2g_{rr}} & \Gamma_{rr}^r &= \frac{g'_{rr}}{2g_{rr}} & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -\frac{r}{g_{rr}} & \Gamma_{\phi\phi}^r &= -\frac{r \sin^2 \theta}{g_{rr}} \\ \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta &= \frac{1}{r} & \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta & \Gamma_{r\phi}^\phi = \Gamma_{\phi r}^\phi &= \frac{1}{r} & \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \text{ctg } \theta \end{aligned}$$

Składowe tensora Ricciego określa wzór:  $R_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^\gamma - \Gamma_{\alpha\gamma,\beta}^\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \Gamma_{\gamma\delta}^\delta - \Gamma_{\alpha\delta}^\gamma \Gamma_{\gamma\beta}^\delta$ . Otrzymamy diagonalny tensor o składowych (**ćwiczenie**):

$$R_{tt} = -\frac{g''_{tt}}{2g_{rr}} + \frac{g_{tt}^{\prime 2}}{4g_{rr}g_{tt}} + \frac{g'_{rr}g'_{tt}}{4g_{rr}^2} - \frac{g'_{tt}}{rg_{rr}} \quad (85)$$

$$R_{rr} = -\frac{g''_{tt}}{2g_{tt}} + \frac{g_{tt}^{\prime 2}}{4g_{tt}^2} + \frac{g'_{rr}g'_{tt}}{4g_{rr}g_{tt}} + \frac{g'_{rr}}{rg_{rr}} \quad (86)$$

$$R_{\theta\theta} = -\frac{rg'_{tt}}{2g_{rr}g_{tt}} + \frac{rg'_{rr}}{2g_{rr}^2} + 1 - \frac{1}{g_{rr}} \quad (87)$$

$$R_{\phi\phi} = \sin^2(\theta)R_{\theta\theta} \quad (88)$$

Teraz możemy obliczyć skalar Ricciego

$$R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} = -\frac{g''_{tt}}{g_{rr}g_{tt}} + \frac{g_{tt}^{\prime 2}}{2g_{rr}g_{tt}^2} + \frac{g'_{rr}g'_{tt}}{2g_{rr}^2g_{tt}} - \frac{2g'_{tt}}{rg_{rr}g_{tt}} + \frac{2g'_{rr}}{rg_{rr}^2} + \frac{2}{r^2} - \frac{2}{r^2g_{rr}} \quad (89)$$

Oraz tensor Einsteina:

$$G_{tt} = -\frac{g_{tt}}{r^2g_{rr}^2} (rg'_{rr} + g_{rr}^2 - g_{rr}) \quad (90)$$

$$G_{rr} = \frac{g'_{tt}}{rg_{tt}} - \frac{1}{r^2}g_{rr} + \frac{1}{r^2} \quad (91)$$

$$G_{\theta\theta} = \frac{r^2g''_{tt}}{2g_{rr}g_{tt}} - \frac{r^2g_{tt}^{\prime 2}}{4g_{rr}g_{tt}^2} - \frac{r^2g'_{rr}g'_{tt}}{4g_{rr}^2g_{tt}} + \frac{rg'_{tt}}{2g_{rr}g_{tt}} - \frac{rg'_{rr}}{2g_{rr}^2} \quad (92)$$

$$G_{\phi\phi} = \sin^2(\theta)G_{\theta\theta} \quad (93)$$

Interesuje nas rozwiązanie w pustej przestrzeni, gdzie znika tensor energii-napięć. Przyrównujemy składowe tensora Einsteina do zera i rozwiązujemy równania różniczkowe (**ćwiczenie**):

$$g_{rr} = \frac{r}{r-r_0} \quad (94)$$

$$g_{tt} = C \frac{r-r_0}{r} \quad (95)$$

Dla  $r \rightarrow \infty$  metryka powinna dążyć do metryki płaskiej przestrzeni, stąd  $C = 1$ . Ostatecznie otrzymaliśmy metrykę Schwarzschilda:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_0}{r}} + r^2 (\sin^2(\theta) d\phi^2 + d\theta^2) \quad (96)$$

## 8 Mechanika kwantowa

### 8.1 Macierzowa reprezentacja rachunku prawdopodobieństwa

W rachunku prawdopodobieństwa podstawową rolę odgrywa trójka:  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  - przestrzeń probabilistyczna,  $\sigma$ -algebra jej podzbiorów i miara - funkcja przeliczalnie addytywna na rozłącznych podziorach t.j.  $\mu(X) = 1$  (unormowana). Funkcja mierzalna pomiędzy przestrzeniami probabilistycznymi  $f : (X, \mathcal{F}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{F}_Y)$  to funkcja dla której  $\forall A \in \mathcal{F}_Y$   $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}_X$ . Dalej będziemy skupiać się na przypadku  $\#X = n < \infty$  i  $\mathcal{F} = 2^X$ .

Klasycznie, jeżeli mamy skończoną  $\sigma$  algebrę zbiorów, to dowolną miarę probabilistyczną możemy przestawić jako wektor  $|p\rangle$  jej wartości na zdarzeniach elementarnych, o dodatnich składowych sumujących się do 1. Zbiorem stanów jest  $n - 1$  wymiarowy sympleks  $\Delta^{n-1} = \{(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}_+^n : \sum_i p_i = 1\}$ . Punktami ekstremalnymi zbioru stanów są stany czyste, przyjmujące dla pewnego zdarzenia elementarnego wartość 1.

Każda funkcja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  jest teraz mierzalna i można ją przedstawić jako kowektor  $\langle f|$  jej wartości. Wartość oczekiwaną obliczamy jako  $\mathbb{E}_p(f) = \langle f|p\rangle$ . Funkcję mierzalną będziemy nazywać obserwabłą.

Zamieńmy teraz wektory prawdopodobieństwa  $\vec{p}$  na macierze diagonalne i podobnie wektory reprezentujące funkcje mierzalne. Mamy wtedy

$$\mathbb{E}_p(f) = p \cdot f = \text{Tr} \left( \begin{bmatrix} p_1 & & \\ & \ddots & \\ & & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 & & \\ & \ddots & \\ & & f_n \end{bmatrix} \right) \quad (97)$$

Stanem układu złożonego jest wektor z  $\mathbb{R}_+^{n_1 \times n_2} = \mathbb{R}_+^{n_1} \otimes \mathbb{R}_+^{n_2}$ . W zapisie macierzowym, będzie to macierz diagonalna z  $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^{n_1 \times n_2}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^{n_1}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^{n_2})$ . Dwa podukłady są niezależne (nieskorelowane), gdy stan układu jest iloczynem tensorowym stanów podukładów.

Rozkłady brzegowe uzyskujemy biorąc ślady częściowe:

$$[\rho_A]_{ij} = \sum_k \rho_{ik,jk} \quad \text{macierz śladów bloków} \quad (98)$$

$$[\rho_B]_{ij} = \sum_k \rho_{ki,kj} \quad \text{suma bloków diagonalnych.} \quad (99)$$

Ślady częściowe macierzy diagonalnych są diagonalne i odtwarzamy klasyczne wzory na rozkłady brzegowe.

Pomiar projektywny (PVM - *projective valued measure*) obserwabli  $F$  jest dany przez rozbiecie przestrzeni probabilistycznej na rozłączne podzbiory, mierzalne względem  $\sigma_F$  (nie mogą rozróżniać punktów dla których  $F$  ma tę samą wartość). W zapisie macierzowym będzie to zbiór projektorów sumujących się do  $I$ . Podprzestrzenie, na które rzutują projektory muszą być sumami podprzestrzeni niezmienniczych  $F$  (przeformułowanie warunku  $\sigma_F$  mierzalności). Prawdopodobieństwo otrzymania  $i$ -tego wyniku wynosi  $\text{Tr}(\rho P_i)$ , a stan po pomiarze:  $P_i \rho P_i / \text{Tr}(\rho P_i)$  (reguła Borna).

Mechanika kwantowa to rozszerzenie teorii probabilistycznej sformułowanej za pomocą macierzy: zarówno macierze stanów jak i obserwabli są macierzami hermitowskimi - uwalniamy ich bazy własne.

### 8.2 Postulaty nierelatywistycznej mechaniki kwantowej

Tak jak z każdym układem klasycznym wiążemy pewną przestrzeń fazową  $X$ , tak z każdym układem kwantowym wiążemy pewną zespoloną przestrzeń Hilberta  $\mathcal{H}$ . Mechanika kwantowa jest niekomutatywnym uogólnieniem klasycznej mechaniki statystycznej i jako taka jest teorią liniową

	Postulat mechaniki kwantowej	Odpowiednik klasyczny
Algebra obserwabli i przestrzeń stanów		
1.1 algebra obserwabli	$\mathcal{B}(\mathcal{H})$	$L_\infty(X)$
1.2 przestrzeń stanów	$\mathcal{B}_T(\mathcal{H})$	$L_\infty(X)^*$
1.3 stany czyste	$\rho =  \psi\rangle\langle\psi $	$\rho = \delta(x, x_0)$
1.4 przestrzeń stanów układu złożonego	$\mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H}_2) \cong \mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$	$L_\infty(X_1)^* \otimes L_\infty(X_2)^* \cong L_\infty(X_1 \times X_2)^*$
1.5 stany podukładów	$\rho_1 = \text{Tr}_2 \rho$	$\rho_1 = \int_{X_2} d\rho$
Pomiar obserwabli $A$		
2.1 instrument pomiarowy	odwzorowanie zbioru wyników $w$ w rozkład $I$ na skończoną sumę ortogonalnych projektorów $a_i \rightarrow P_i$ $P_i$ "zachowuje podprzestrzenie własne"	odwzorowanie zbioru wyników $w$ w skończone rozbiecie $X$ na rozłączne podzbiory $a_i \rightarrow A_i$ każda poziomicą leży w dokładnie jednym $A_i$
2.2 prawdopodobieństwo otrzymania wyniku $a_i$	$\text{Tr}(\rho P_i)$	$\rho(A_i)$
2.3 stan po pomiarze z wynikiem $a_i$	$P_i \rho P_i / \text{Tr} \rho P_i$	$\chi_{A_i} / \rho(A_i)$
Dynamika		
3.1 generator ewolucji	dowolna obserwabla $H$	dowolna obserwabla $H$
3.2 równanie ewolucji	$i\hbar \partial_t \rho = [H, \rho]$	$\partial_t \rho = \{H, \rho\}$

Zauważmy, że ewolucja przeprowadza stany czyste w stany czyste. Jeżeli zapiszemy  $\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ , to wektor  $\psi(t)$  (zwany wektorem stanu) podlega równaniu:

$$i\hbar\partial_t\psi = H\psi$$

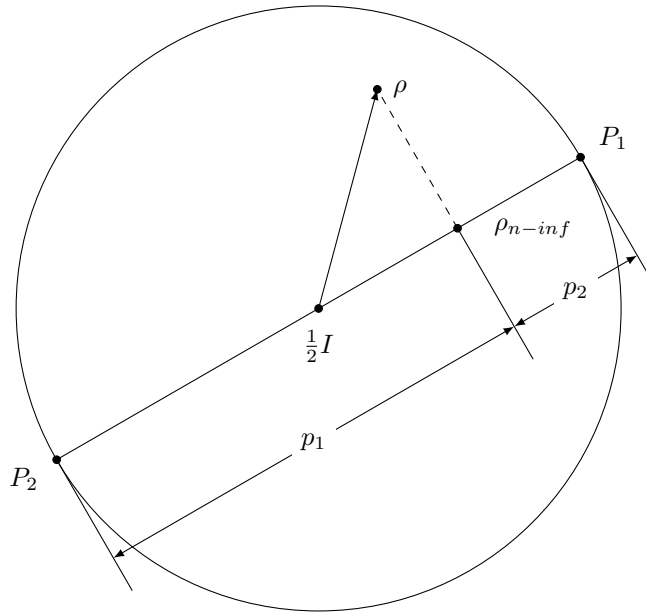
znanemu jako równanie Schrödingera.

### 8.3 Układy o spinie 1/2

Najprostszą nietrywialną przestrzenią Hilberta jest  $\mathbb{C}^2$ . Dowolny operator samosprężony o śladzie 1 można zapisać jako:

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{bmatrix} \quad (100)$$

jest od dodatniookreślony wtw gdy  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ . Stany czyste - projektory jednowymiarowe spełniają warunek  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Ortogonalne projektory odpowiadają punktom antypodycznym na sferze. Dynamika polega na jednostajnym obracaniu się kuli wokół osi wyznaczonej przez bazę własną generatora dynamiki. Pomiar polega na rzutowaniu kuli na oś wyznaczoną przez dwa punkty antypodyczne (zbiór ortogonalnych projektorów).



Rysunek 2: Pomiar projektywny nieinformujący (rzutowanie na średnicę) i informujący (kolaps) w sferze Blocha. Płaszczyznę rysunku wyznaczają projektory pomiaru i mierzony stan.

### 8.4 Zasada nieoznaczoności i kryptografia kwantowa

Konsekwencją niekomutowania obserwabli jest zasada nieoznaczoności. Jeżeli nieoznaczoność pewnej obserwabli w pewnym stanie jest 0, musi to być jej stan własny. Dla każdej innej obserwabli, która z nią nie komutuje, nie będzie to stan własny i nieoznaczoność nie będzie wynosiła 0.

**BB84** W protokole BB84 strony A i B chcą ustalić wspólny klucz bitowy, nieznaną osobom trzecim. Protokół pozwala na znalezienie wspólnego klucza i mieć pewność że nikt inny nie ma o nim informacji.

Strona A losuje ciąg wartości bitów: 0,1 i ciąg baz ze zbioru

$$\{|0\rangle, |1\rangle\}, \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \right\}.$$

Koduje  $i$ -ty bit w  $i$ -tej bazie i wysyła do B. Strona B losuje dla każdego bitu jedną z baz z powyższego zbioru i dokonuje pomiaru. Po przesłaniu wszystkich bitów, Strona A informuje publicznie o ciągu użytych baz. Strona B odpowiada, które z baz wybranych przez niego były zgodne. Bity, dla których bazy się nie zgadzały (połowa wszystkich) są usuwane i obie strony mają ten sam ciąg bitów.

Załóżmy teraz, że w tor włącza się podsłuchiwacz, który dokonuje pomiaru w jednej z baz a następnie dokonuje przygotowania bitu w tej bazie zgodnie z otrzymanym wynikiem pomiaru. Podsłuchujący dla połowy bitów trafia z wyborem bazy, wtedy odczytuje prawidłową wartość bez zmieniania jej. Jeżeli natomiast wybierze bazę niezgodną z nadawcą, wtedy z prawdopodobieństwem 1/2 podsłuchiwacz odczyta prawidłową wartość i niezależnie z prawdopodobieństwem 1/2 odbiorca odczyta niezmienną wartość bitu. Oznacza to, że 1/4 wysłanych bitów zostanie podsłuchana nieprawidłowo, ale też 1/4 podsłuchanych bitów będzie miała u nadawcy inną wartość niż u odbiorcy. Poświęcenie części bitów klucza pozwala na wykrycie podsłuchu.

## 8.5 Niekołmogorowskość nierelatywistycznej mechaniki kwantowej

Rozważmy cztery zmienne losowe  $A_1, A_2, B_1, B_2$  określone na przestrzeni probabilistycznej  $\Omega$  i przyjmujące wartości  $\pm 1$ . Zauważmy, że zachodzi ograniczenie  $A_1 B_1 + A_1 B_2 + A_2 B_1 - A_2 B_2 \leq 2$  dla każdego punktu w  $\Omega$ . Biorąc średnią dostaniemy

$$\mathbb{E}(A_1 B_1) + \mathbb{E}(A_1 B_2) + \mathbb{E}(A_2 B_1) - \mathbb{E}(A_2 B_2) \leq 2 \quad (101)$$

Załóżmy że mamy źródło par cząstek o spinie  $1/2$  które rozbiegają się w przeciwnych kierunkach i następnie są mierzone jednocześnie (wzgl. źródła) w dwóch odległych laboratoriach. Każde laboratorium (A i B) wybiera losowo z równym prawdopodobieństwem jeden z dwóch kierunków spinu (1 lub 2) i dokonuje pomiaru. Wynik pomiaru spinu  $i$  w laboratorium  $C$  to zmienna losowa  $C_i$ . Zmienne  $A_1, A_2, B_1, B_2$  powinny spełniać nierówność (101). Przyjrzyjmy się co się stanie, jeżeli mierzonymi wielkościami są  $\hat{A}_1 = \sigma_z, \hat{A}_2 = \sigma_x, \hat{B}_1 = (\sigma_x + \sigma_z)/\sqrt{2}, \hat{B}_2 = (\sigma_x - \sigma_z)/\sqrt{2}$ , a źródło produkuje stan czysty reprezentowany przez wektor  $|\Psi\rangle = (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$ :

$$\langle \Psi | \hat{A}_1 \otimes \hat{B}_1 | \Psi \rangle + \langle \Psi | \hat{A}_1 \otimes \hat{B}_2 | \Psi \rangle + \langle \Psi | \hat{A}_2 \otimes \hat{B}_1 | \Psi \rangle - \langle \Psi | \hat{A}_2 \otimes \hat{B}_2 | \Psi \rangle = 2\sqrt{2}$$

Zatem nierówność (101) jest łamana, co przeczy założeniu, że istnieje jedna przestrzeń probabilistyczna (przestrzeń parametrów ukrytych) na której zmienne są zdefiniowane. Zgodnie z aksjomatyką Kołmogorowa, każdemu doświadczeniu losowemu można przypisać przestrzeń probabilistyczną. Tutaj ten aksjomat jest nieprawdziwy.

## 8.6 Teleportacja

Załóżmy że strony A i B współdzielą stan czysty splątany dwóch qubitów reprezentowany przez wektor  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$  i dodatkowo A posiada qubit w pewnym stanie  $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ . A wykonuje na posiadanych dwóch qubitach pomiar łączny w bazie magicznej:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

Z równymi prawdopodobieństwami, po pomiarze stanem ostatniego qubitów będzie:

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle \quad \alpha|1\rangle + \beta|0\rangle \quad \alpha|1\rangle - \beta|0\rangle$$

A informuje o swoim wyniku B (przesyłając 2 bity), który stosując stosowną operację unitarną przekształca stan swojego qubitów do stanu posiadanego początkowo przez A. Współdzielony stan splątany został zniszczony, a A posiada teraz dwa qubity w stanie czystym reprezentowanym przez jeden z wektorów bazy magicznej. Do przesłania jednego qubitów musimy zużyć dwa bity i jedną parę w stanie maksymalnie splątanych.

## 8.7 Oscylator harmoniczny

Jeżeli rozważamy cząstkę w jednym wymiarze, jej przestrzenią Hilberta jest przestrzeń  $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ . Jeżeli ustalimy bazę przestrzeni tak, by operator położenia był diagonalny (mnożenie przez  $x$ ), to operator pędu będzie postaci  $-i\hbar\partial_x$ . Komutator tych dwóch operatorów jest równy  $i\hbar I$ . Jest to szczególny przypadek procedury kwantowania kanonicznego, gdzie zmiennym kanonicznie sprzężonym klasycznie przypisuje się operatory komutujące do  $i\hbar I$  (nawias Poissona staje się komutatorem). Zauważmy, że takie pary operatorów mogą istnieć tylko dla nieskończonego wymiarowego przestrzeni Hilberta.

Klasyczny Hamiltonian oscylatora harmonicznego (kulka na sprężynie) ma postać:

$$H(p, x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad \longmapsto \quad \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{x}^2 = \frac{1}{2m}(m^2\omega^2 \hat{x}^2 - (i\hat{p})^2) \quad (102)$$

Znany ze szkoły wzór na różnicę kwadratów w przypadku niekomutatywnym ma postać  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) - [a, b]$ . Pozwala on przepisać hamiltonian jako:

$$\hat{H} = \hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right), \quad (103)$$

gdzie  $\hat{a} = (m\omega\hat{x} + i\hat{p})/\sqrt{2m\hbar\omega}$  (**ćwiczenie**). Operatory te nazywamy operatorami kreacji ( $\hat{a}^\dagger$ ) i anihilacji ( $\hat{a}$ ).

**Rozwiązanie zagadnienia własnego (ćwiczenia)** Operatory  $\hat{a}^\dagger$  i  $\hat{a}$  spełniają relację komutacji  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ . Rozwiązujemy zagadnienie własne dla  $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ . Weźmy unormowany wektor własny  $\Psi_\lambda$  do wartości własnej  $\lambda$ . Zauważmy, że  $\hat{a}^\dagger \Psi_\lambda \sim \Psi_{\lambda+1}$  i  $\hat{a} \Psi_\lambda \sim \Psi_{\lambda-1}$ . Można pokazać, że  $\|\hat{a} \Psi_\lambda\| = \sqrt{\lambda}$  i  $\|\hat{a}^\dagger \Psi_\lambda\| = \sqrt{\lambda+1}$  (**ćwiczenie**).

Ciąg ten musi być ograniczony z dołu ( $\hat{H}$  jest dodatnio określony), zatem dla pewnego  $\lambda$ ,  $a\Psi_\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ . Łatwo obliczyć, że:

$$\Psi_0 = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right), \quad (104)$$

a wektor własny  $\Psi_n$  obliczamy działając na  $\Psi_0$   $n$ -krotnie wektorem kreacji i dzieląc przez  $\sqrt{n!}$ . Jeżeli wprowadzimy zmienną bezwymiarową  $y = \sqrt{m\omega/\hbar}x$ , dostaniemy wzór rekurencyjny na  $\Psi_n$ :

$$\Psi_n(y) = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(y) \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right), \quad \text{gdzie} \quad H_{n+1} = 2yH_n - \partial_y H_n, \quad H_0 = 1. \quad (105)$$

Wielomiany  $H_n$  to wielomiany Hermite'a.

Oscylator w najniższym stanie wykonuje drgania zerowe o energii  $\hbar\omega/2$ . Kolejne poziomy są równoodległe - operator kreacji tworzy jeden kwant energii.