

Analiza Matematyczna II

Wykład I: Całki krzywoliniowe

Gniewomir Sarbicki

Krzywe regularne

Definicja:

Krzywą regularną nazywamy odwzorowanie

$$\gamma \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$$

lokalnie odwracalne

$$\forall t \in (a, b) \quad \gamma'(t) \neq 0.$$

Definicja:

Odwzorowanie ciągłe $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$ nazywamy **krzywą kawałkami regularną**, jeżeli istnieje podział $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ taki, że

$$\forall i \quad \gamma|_{[t_{i-1}, t_i]} \text{ jest krzywą regularną}$$

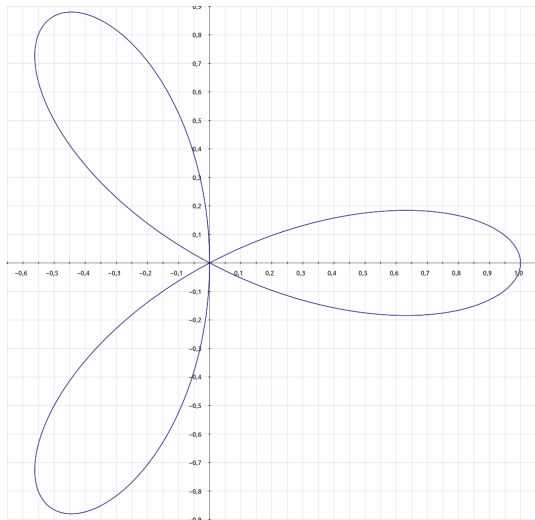
Uwaga: Krzywa ciągła $\gamma \in C^0([a, b], \mathbb{R}^2)$ może wypełniać obszar (Peano, Sierpińskiego)

Lokalna odwracalność

Przykład: Krzywa regularna

$$\gamma(t) = [\cos 3t \cos t, \cos 3t \sin t]$$

jest lokalnie odwracalna, ale nie globalnie.



Krzywe geometryczne

Dwie parametryzacje

$$\gamma_1 : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n, \quad \gamma_2 : [c, d] \mapsto \mathbb{R}^n$$

nazywamy równoważnymi, jeżeli różnią się o **dyfeomorfizm** $\phi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$\gamma_2 = \gamma_1 \circ \phi$$

Jest to relacja równoważności. Jej klasami równoważności są **niezorientowane krzywe geometryczne**.

Jeżeli dodatkowo dołożymy warunek $\forall t \ \phi'(t) > 0$, to klasami abstrakcji będą **zorientowane krzywe geometryczne**.

Długość krzywej

Dla krzywej regularnej $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiujemy:

Definicja:

Niech P - zbiór podziałów odcinka $[a, b]$. Wielkość

$$L[\gamma] = \sup_{p \in P} \sum_{k=1}^{\#p} |\vec{r}(p_k) - \vec{r}(p_{k-1})|$$

Nazywamy **długością krzywej** γ .

Mamy następujące:

Twierdzenie (o długości krzywej):

$$L[\gamma] = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

Długość krzywej

Zauważmy, że definicja długości jest poprawna dla krzywych geometrycznych, t.j. nie zależy od krzywej regularnej będącej jej parametryzacją.

Wyrażenie $ds = |\gamma'(t)|dt$ nazywamy różniczką długości łuku.

Całka krzywoliniowa funkcji skalarnej

Niech $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$ będzie jedną z parametryzacji krzywej geometrycznej C . Niech $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ będzie całkowalna w sensie Riemanna

Przez **podział oznaczony** odcinka $[a, b]$ rozumiemy skończony ciąg p punktów pośrednich:

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

wraz z ciągiem τ punktów wewnętrznych odcinka: $\tau_i \in [t_{k-1}, t_k]$.

Dla podziału oznaczonego budujemy **sumę Riemanna**

$$S(p, \tau) = \sum_{k=1}^n f(\gamma(\tau_k)) \Delta s_k,$$

gdzie $s_k = L[\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}]$, a $\|p\| = \max_k \Delta s_k$ (**średnica podziału**).

Całka krzywoliniowa funkcji skalarnej

Definicja:

Granicę

$$\lim_{||p|| \rightarrow 0} S(p, \tau) =: \int_C f ds$$

nazywamy **całką krzywoliniową**.

Wykorzystując wzór na różniczkę długości łuku mamy:

$$\int_C f ds = \int_C f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt$$

Ćwiczenie: Pokaż niezależność całki krzywoliniowej od parametryzacji krzywej

Zastosowania całki krzywoliniowej skalarnej

Niech C będzie figurą jednowymiarową (łukiem), zadaną parametrycznie przez

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in [a, b],$$

wtedy $ds = |\gamma'(t)|dt$.

Masa figury jednowymiarowej: Masa figury C o gęstości liniowej $\rho = \rho(x, y, z)$ dana jest wzorem:

$$m = \int_C \rho ds = \int_a^b \rho(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

wyrażenie ρds nazywamy **różniczką masy** i oznaczamy jako dm .

Środek ciężkości figury jednowymiarowej: Współrzędne środka ciężkości figury o gęstości liniowej $\rho = \rho(x, y, z)$ dane są wzorem:

$$\vec{R} = \frac{1}{m} \int_C \vec{r} dm = \frac{1}{m} \int_a^b \vec{r}(t) \rho(t) |\gamma'(t)| dt.$$

Całka krzywoliniowa pola wektorowego

Definicja:

Polem wektorowym na $\mathbb{R}^n$ nazywamy funkcję $F : \mathbb{R}^n \supset \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$.

Definicja:

Dla krzywej geometrycznej C w parametryzacji $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$, **różniczką wektora położenia** nazywamy różniczkę $\gamma'(t)dt =: d\vec{r}$.

Fakt: Definicja różniczki wektora położenia jest niezależna od parametryzacji

Definicja:

Całką krzywoliniową pola wektorowego nazywamy wielkość

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^n \int_C F_i dr_i = \sum_{i=1}^n \int_a^b F_i(\gamma_i(t)) \gamma'_i(t) dt$$

Fakt: Całka ta zmienia znak przy zmianie orientacji krzywej.

Interpretacje fizyczne

- praca: $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$
- napięcie: $U = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{r}$
- siła elektromotoryczna w obwodzie elektrycznym: $U = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r}$
- siła elektromotoryczna w obwodzie magnetycznym: $U = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r}$

Ćwiczenie: Wzdłuż osi z działa pole magnetyczne liniowo rosnące w czasie. Wywołuje ono pole elektryczne $\vec{E} = \frac{1}{2}\dot{B}[y, -x]$, więc na ładunek q działa siła. Jaką pracę wykonamy przenosząc ładunek po okręgu w płaszczyźnie XY o promieniu r .

Ćwiczenie: Jaką pracę wykonamy przenosząc ładunek po okręgu w płaszczyźnie XZ w polu siły grawitacji $mg\vec{e}_z$?

Pola potencjalne

Twierdzenie:

Jeżeli $\vec{F} = \vec{\nabla}V$, to

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = V(B) - V(A) = \int_{\partial C} V$$

Wniosek: Całka po krzywej zamkniętej z pola potencjalnego wynosi 0.

Kryterium potencjalności

Jeżeli $\vec{F}$ jest polem potencjalnym w obszarze Ω , to $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$.

Jeżeli $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ w obszarze **jednospójnym**, to $\vec{F} = \vec{\nabla} V$.

Niech $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus B^2(0, 1)$. Pole

$$F(x, y) = \frac{[-y, x]}{x^2 + y^2}$$

spełnia $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$, ale nie jest potencjalne (policz całkę po okręgu).