

Zadanie 1. Zbudować szereg rozdzielczy dla danych:

2.0	2.3	2.7	2.8	2.7	2.7
2.6	2.6	2.5	2.6	2.7	2.8
2.8	2.7	2.7	2.6	2.6	2.6
2.6	2.6	2.6	2.7	2.6	2.5
2.4	2.4	2.3			

przyjmując $b = 0.19$ oraz początek 1.98 wyznaczyć medianę i modę.

Zadanie 2. Wykonano 40 pomiarów liczby skrętów przędzy na odcinku o długości 500 mm i otrzymano następujące wyniki

405	420	411	427	479	440	378	468	437	452
421	414	402	422	462	428	431	414	437	405
390	425	400	432	447	385	419	400	425	458
439	360	405	369	406	431	412	387	416	425

Zbudować szereg rozdzielczy przyjmując liczbę klas $k = 8$. Narysować histogram

1 Średnie

Zadanie 3. Pojazd przebył drogę złożoną z 3 odcinków, każdy od długości s . Pierwszy odcinek ze stałą prędkością $v_1 = 50$ km/h, drugi ze stałą prędkością $v_2 = 60$ km/h i trzeci ze stałą prędkością $v_3 = 70$ km/h. Z jaką średnią prędkością powinien poruszać się pojazd, aby całą drogę $3s$ przebyć w tym samym czasie?

Zadanie 4. Cztery naczynia w kształcie sześcianów o wymiarach krawędzi odpowiednio

$$\begin{aligned}a_1 &= 1.5 \text{ dm} \\a_2 &= 2.1 \text{ dm} \\a_3 &= 3.3 \text{ dm} \\a_4 &= 4.5 \text{ dm}\end{aligned}$$

należy zastąpić czterema jednakowymi naczyniami tego samego kształtu co poprzednio, tak by suma objętości naczyń w obu przypadkach była taka sama.

Zadanie 5. Mieszanka zawiera 50 kg składnika A w cenie 15 zł za kg, 30 kg składnika B w cenie 20 zł za kg i 20 kg składnika C w cenie 30 zł za kg. Wyznacz cenę 1 kg mieszanki.

Zadanie 6. Rozważmy parzystą liczbę $2k$ ($k \geq 2$) dowolnych liczb uporządkowanych niemalejąco

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{2k} \quad (1)$$

spełniających warunek, że $x_k \neq x_{k+1}$ (dwie środkowe liczby są różne). Obierzmy dowolną liczbę a zawartą między nimi

$$x_k < a < x_{k+1} \quad (2)$$

Wykazać, że odchylenie przeciętne tych $2k$ liczb obliczone od dowolnej liczby a spełniającej (??) nie zależy od wyboru tej liczby.

Zadanie 7. Wyznaczyć wszystkie miary rozproszenia 25 elementowej próbki

2.15	2.31	2.29	3.11	2.62
2.47	2.97	3.01	2.52	2.18
2.73	2.61	2.41	2.27	2.54
2.33	2.81	2.73	2.19	3.08
2.75	3.00	2.43	2.55	2.85

Zadanie 8. Obliczyć średnią arytmetyczną, wariancję i odchylenie standardowe połączonych pięciu próbek.

Nr próbki i	Liczność próbki N_i	śr. arytm. $\bar{x}_i$	war. s_i^2
1	15	3.3	1.25
2	20	3.7	1.19
3	30	3.6	1.15
4	15	3.9	1.05
5	20	3.5	1.20

Zadanie 9. Na podstawie wzoru

$$s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^r s_i^2 N_i + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^r (\bar{x}_i - \bar{x})^2 N_i \quad (3)$$

wynioskować, czy i kiedy wariancja całkowita może być równa

- wariancji wewnętrznej s_w^2
- wariancji zewnętrznej s_z^2

2 Momenty

Zadanie 10. Wyznaczyć średnią arytmetyczną oraz pierwsze cztery momenty centralne dla czterech szeregów rozdzielczych.

Środki klas $\bar{x}_i$	Liczności n_i			
	Szereg I	Szereg II	Szereg III	Szereg IV
1	0	2	0	2
2	6	2	2	4
3	12	10	20	10
4	14	22	12	12
5	12	10	10	20
6	6	2	4	2
7	0	2	2	0

Zadanie 11. Dane są dwie 6 elementowe próbki:

Próbka I 80, 40, 40, 80, 40, 80

Próbka II 40, 80, 120, 80, 120, 40

Obliczyć i porównać współczynniki zmienności i współczynniki nierównomierności obu próbek.

3 Zdarzenia losowe

Zadanie 12. Niech przestrzeń Ω zdarzeń elementarnych doświadczenia składa się z pięciu zdarzeń elementarnych ω_i : $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$. Określamy zdarzenia

$$A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\} \quad , \quad B = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\} \quad (4)$$

znaleźć zdarzenia: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

Zadanie 13. Uprość wyrażenia

a) $A \cup A$,
 $A \cap A$
 $A \cup \Omega$,
 $A \cap \Omega$

b) $\Omega \subset A \Rightarrow A = \dots$,
 $A \subset \emptyset \Rightarrow A = \dots$

c) zdarzenie $A \subset B \Rightarrow$:
 $A \cup B = \dots$,
 $A \cap B = \dots$,
 $A \setminus B = \dots$,
 $A \cap B \cap C = \dots$

Zadanie 14. Uprość równoważności

- a) $A \cap B = A \iff \dots$,
 $A \cup B = B \iff \dots$,
 $A \setminus B = \emptyset \iff \dots$,
 $A' \cup B = \Omega \iff \dots$
- b) $A \cap B = A \cup B \iff A = \dots$,
 $(A \cap B = \emptyset \wedge A \cup B = \Omega) \iff B = \dots$,
 $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \emptyset \iff A = \dots$,
 $A \setminus B = A \iff A \cap B = \dots$

Zadanie 15. Zdarzenia E_1 i E_2 opisane są za pomocą danych zdarzeń A, B, C równościami

- a) $E_1 = (A \cup B) \cap (A' \cup B) \cap (A \cup B')$
b) $E_2 = A \cup AC \cup BC \cup A'B$

uprość prawe strony tych równań.

Zadanie 16. Zdarzenie E jest opisane przy pomocy zdarzeń A, B, C . Uprościć opis, jeśli

- a) $E = (A \cup B)(A' \cup B)$
b) $E = (A \cup B)C \cup (B \cup C)A \cup (C \cup A)B$
c) $E = (A \cup B)(B \cup C)$, gdy $A \subset B$.

Zadanie 17. Wykazać, że

- a) $(B \setminus A) \cup A = A \cup B$
b) $(B \setminus A) \cup A = B \iff A \subset B$

Zadanie 18. Czy możliwe są trzy zdarzenia A, B, C , takie, aby

$$AB \neq \emptyset \wedge AC = \emptyset \wedge (AB) \setminus C = \emptyset \quad (5)$$

Zadanie 19. Praca mechanika polega na zabezpieczeniu technicznym sprawności trzech maszyn M_1, M_2, M_3 w ciągu odcinka czasu. W czasie tym każda z maszyn pracuje niezawodnie albo wymaga interwencji mechanika. Niech A_j , $j = 1, 2, 3$ oznacza zdarzenie: maszyna M_j wymaga interwencji mechanika.

- a) określić przestrzeń zdarzeń elementarnych
b) za pomocą zdarzeń elementarnych opisać zdarzenia $A_1, A'_1, A_2, A'_2, A_3, A'_3$

- c) za pomocą działań $\cup, \cap, '$ wykonanych na zdarzeniach A_j opisać zdarzenia B_j jeśli oznaczymy:
- B_1 zajście wszystkich trzech zdarzeń A_1, A_2, A_3 ,
 - B_2 nie zajście żadnego ze zdarzeń A_1, A_2, A_3 ,
 - B_3 zajście tylko zdarzenia A_1 ,
 - B_4 zajście tylko jednego spośród zdarzeń A_1, A_2, A_3 ,
 - B_5 zajście co najmniej jednego ze zdarzeń A_1, A_2, A_3 ,
 - B_6 zajście tylko zdarzeń A_1 i A_2 ,
 - B_7 zajście dokładnie dwóch zdarzeń spośród zdarzeń A_1, A_2, A_3 ,
 - B_8 zajście co najmniej dwóch zdarzeń spośród zdarzeń A_1, A_2, A_3 ,
 - B_9 zajście co najwyżej jednego zdarzenia spośród zdarzeń A_1, A_2, A_3 .
- d) opisać określone wyżej zdarzenia B_j za pomocą zdarzeń elementarnych.
- e) znaleźć liczbę $n(\mathcal{Z})$ wszystkich zdarzeń w tym doświadczeniu.

4 Kombinatoryka

4.1 Permutacje bez powtórzeń

Zadanie 20. Ile liczb różnych pięciocyfrowych można utworzyć z cyfr: 0,1,2,3,4 takich, aby żadne cyfry w liczbie się nie powtarzały?

Zadanie 21. Ile liczb różnych 6-cyfrowych można utworzyć z cyfr: 0,1,2,3,4,5 takich, aby żadna cyfra w liczbie się nie powtarzała i aby na miejscu jedności stały cyfry 3 lub 4?

Zadanie 22. W urnie jest 5 kul ponumerowanych od 1 do 5. Losujemy kolejno 5 kul bez zwracania. Ile jest możliwych wyników tego losowania?

Zadanie 23. W urnie jest 5 kul ponumerowanych od 1 do 5. Losujemy kolejno bez zwracania wszystkie kule i zapisujemy ich numery w kolejności losowania. Ile liczb 5-cyfrowych większych od 20000, ale mniejszych od 40000 możemy otrzymać?

Zadanie 24. Ile jest permutacji liczb 1,2,3,4,5,6, w których

1. liczby 1,2 sąsiadują ze sobą w kolejności wzrastającej,
2. liczby 1,2 sąsiadują ze sobą (niezależnie od kolejności),
3. liczby 1,2 nie sąsiadują ze sobą,
4. liczby 1,2,3 sąsiadują ze sobą w kolejności wzrastającej,
5. liczby 1,2,3 nie sąsiadują ze sobą.

Zadanie 25. Cztery kule białe, cztery czarne i cztery zielone numerujemy i wkładamy obok siebie w szereg tak, aby każde trzy po sobie następujące kule były różnego koloru (np. biała, zielona, czarna). Ilość sposobami można to uczynić pod warunkiem, że kolejność barw jest ustalona?

4.2 Permutacje z powtórzeniami

Zadanie 26. W urnie znajduje się osiem kul ponumerowanych, przy czym 4 kule oznaczone są numerem 1, dwie kule numerem 2, dwie kule numerem 3. Losujemy kolejno bez zwracania osiem kul. Ile różnych liczb ośmiocyfrowych możemy otrzymać w ten sposób.

Zadanie 27. Ile różnych wyrazów mających sens lub nie możemy otrzymać z wyrazu Missisipi, przy założeniu, że wykorzystujemy wszystkie litery występujące w tym wyrazie.

Zadanie 28. Ilość sposobami można posadzić na pięciu krzesłach

- pięć osób
- trzy osoby

Zadanie 29. Ile 5-cyfrowych liczb parzystych można utworzyć z cyfr 1,2,3,4 przy założeniu, że cyfra 1 powtarza się 2 razy?

Zadanie 30. Ile różnych sznurów można ułożyć z sześciu koralików czerwonych i 4 białych przy założeniu, że ustalimy początek i koniec sznura?

4.3 Wariacje

Zadanie 31. Ile istnieje funkcji różnowartościowych określonych na zbiorze $X = \{1, 2\}$ o wartościach w zbiorze $V = \{a, b, c, d\}$?

Zadanie 32. Ile można utworzyć różnych słów sześcioliterowych z sensem lub bez, dysponując alfabetem 24 literowym, w którym litery nie powtarzają się?

Zadanie 33. Ile można utworzyć czterokolorowych chorągiewek z sześciu barw, jeżeli barwy rozumiemy jako kolorowe pasy pionowe występujące obok siebie?

Zadanie 34. Ile można utworzyć liczb 6-cyfrowych o nie powtarzających się cyfrach

- parzystych
- nieparzystych

Zadanie 35. Grupa dzieci w przedszkolu bierze udział w zabawie. W jednej z faz zabawy dzieci łączą się w pary. Ile dzieci brało udział w zabawie, jeżeli wiadomo, że mogły połączyć się w pary na 110 sposobów?

Zadanie 36. W sali kinowej fotele ponumerowane są od 1 do 400, po dwadzieścia foteli w każdym rzędzie. Pietnastoosbowa wycieczka kupując bilety poprosiła, aby były one na miejscu w rzędzie 7 i 8, żeby w 7 rzędzie otrzymały bilety dwie trzecie uczestników wycieczki i aby osoby siedzące w rzędzie 8 nie siedziały za osobami w rzędzie siódmym (warunek dotyczy tylko uczestników wycieczki). Ile istnieje sposobów kupienia biletów spełniających żądane warunki.

4.4 Wariacje z powtórzeniami

Zadanie 37. Mamy osiem kul numerowanych liczbami od 1 do 8. Kule wrzucamy na chybił trafił do 3 szuflad. Ile jest różnych rozmieszczeń tych kul?

Zadanie 38. Ile istnieje funkcji odwzorowujących zbiór $X = \{1, 2, 3\}$ w zbiór $Y = \{a, b, c, d, e\}$?

Zadanie 39. Ile można utworzyć różnych liczb 4-cyfrowych

- parzystych
- nieparzystych

Zadanie 40. Z talii 52 kart losujemy jedną, zwracamy ją, karty tasujemy i losujemy drugą. Ile jest możliwych wyników losowania?

4.5 Kombinacje bez powtórzeń

Zadanie 41. Z talii 52 kart losujemy bez zwracania 13 kart. Ile istnieje możliwych wyników losowań?

Zadanie 42. Z talii 52 kart losujemy bez zwracania 10. Na ile sposobów możemy wylosować asa kier?

Zadanie 43. Z okazji zjazdu spotyka się 10 przyjaciół. Ile nastąpi powitań?

5 Prawdopodobieństwo

Zadanie 44. Osoba X wykonuje pewną pracę w ciągu 4, 5, lub 6 godzin i może popełnić przy tym 0, 1 albo 2 błędy. Zakładając jednakowe prawdopodobieństwo dla każdego z 9 zdarzeń jednoelementowych, znaleźć prawdopodobieństwa następujących zdarzeń

1. Praca zostanie wykonana w ciągu 4 godzin (zd. A)
2. Praca zostanie wykonana bezbłędnie w czasie 6 h (zd. B)
3. Praca zostanie wykonana w ciągu 5 godzin najwyżej z jednym błędem (zd. C)

4. praca zostanie wykonana z co najwyżej jednym błędem (zd. D)

Rozważamy próbki losowe o liczebności r pobrane ze zwracaniem z populacji o liczebności n składającej się z elementów $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Będziemy badali zdarzenie A polegające na tym, że w próbce $(a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_r})$ żaden element nie pojawi się dwukrotnie, tzn. nasza próbka mogła być pobrana bez zwracania

$$P = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1)}{n^r}$$

Zadanie 45. Winda rusza z $r = 7$ pasażerami i zatrzymuje się na $n = 10$ piętrach. Jakie jest prawdopodobieństwo p , tego, że żadnych dwóch pasażerów nie opuści windy w tym samym czasie?

Zadanie 46. Jakie jest prawdopodobieństwo, że na przyjęciu złożonym z 23 osób co najmniej dwie osoby mają w ten sam dzień urodziny?

Zadanie 47. Oblicz prawdopodobieństwo, że piątka kart w pokerze i 13 kart w brydżu zawiera wszystkie wartości różne.

Zadanie 48. Przy stoliku brydżowym rozdaje się 52 karty pomiędzy 4 graczy, po 13 kart każdemu, wobec czego liczba różnych sytuacji wynosi

$$\frac{52!}{(13!)^4}$$

Oblicz prawdopodobieństwo, że każdy z graczy ma asa.

Zadanie 49. Oblicz prawdopodobieństwo wygranej w lotka.

Zadanie 50. Na szczyt gór prowadzi pięć dróg. Każda z nich nadaje się również do zejścia. Zakładamy ponadto, że wszystkie trasy są równorzędne. Oblicz prawd. spotkania się dwóch znajomych, z których jeden wchodzi na szczyt, a drugi jest w drodze powrotnej.

Zadanie 51. W fizyce statystycznej rozważa się rozkład (rozmieszczenie) k cząstek w n elementarnych obszarach zwanych komórkami. W zależności od postaci tych cząstek przyjmuje się jedno z trzech następujących założeń

1. cząstki różnią się między sobą (zatem wzajemna zmiana komórek przez dwie cząstki daje nowy rozkład) i liczba cząstek w jednej komórce jest dowolna
2. cząstki są nierozróżnialne między sobą (zatem wzajemna zmiana komórek przez dwie cząstki daje ten sam rozkład - istotne jest tylko ile cząstek trafiło do poszczególnych komórek, a nie to jakie są cząstki) i liczba cząstek w jednej komórce jest dowolna.
3. cząstki nie różnią się między sobą i w każdej komórce może znaleźć się co najwyżej jedna cząstka.

Stosowanie do przyjętych założeń mówi się odpowiednio o statystyce: Maxwell-Boltzmann, Bosego-Einsteina, Fermiego-Diraca. Zakładamy ponadto, że wszystkie dopuszczalne rozmieszczenia są jednakowo prawdopodobne. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że

1. k cząstek rozmieści się po jednej w k ustalonych komórkach dla każdej rozważanych tam statystyk
2. w przypadku statystyki Bosego-Einsteina znajdzie się dokładnie m cząstek
 - w ustalonej komórce
 - w jednej z n komórek
3. w przypadku statystyki BE wszystkie komórki będą zajęte
4. w przypadku statystyki MB w pierwszej komórce znajdzie się dokładnie k_1 cząstek, w drugiej k_2 cząstek, ..., w n -tej - k_n cząstek.

Zadanie 52. Na dziesięciu klockach wyrzeźbiono litery: a, a, k, s, s, t, t, t, y, y. Bawiąc się nimi dziecko układa je w rząd. Oblicz prawdopodobieństwo, że przypadkowo złoży ono słowo: statystyka

Zadanie 53. Błędy drukarskie. Każda stronica książki zawiera N symboli, niektóre z nich mogą być wydrukowane omyłkowo. Książka zawiera $n = 500$ stronic i $r = 50$ błędów drukarskich. Ile wynosi prawdopodobieństwo, że stronicie o numerach $1, 2, \dots, n$ zawiera odpowiednio $r_1, r_2, \dots, r_n$ omyłek.

Zadanie 54. Z dziesięciu pracowników należy utworzyć:

1. dwa zespoły liczące po 4 i 6 pracowników
2. 3 zespoły liczące po 5, 3 i 2 pracowników
3. pięć zespołów dwuosobowych

Dla każdego podziału na zespoły znaleźć prawd., że dwóch ustalonych pracowników znajdzie się w tym samym zespole przy założeniu, że podział na zespoły odbywa się losowo.

Zadanie 55. Każda praca pisemna z egzaminu jest sprawdzana dwukrotnie. Prawd. niezauważenia błędu przez pierwszą osobę sprawdzającą wynosi 0.08. Dla drugiej osoby prawd. to wynosi 0.05. Obliczyć prawd., że błąd popełniony w pracy pisemnej nie zostanie zauważony.

Zadanie 56. Problem rodziny. W pewnej rodzinie cztery dziewczęta zmywają kolejno naczy-
nia. Z łącznej ilości czterech przypadków stłuczonych naczyń, trzy były spowodowane przez najmłodszą z dziewcząt, która wobec tego została przezwaną gapą. Czy miała ona rację twierdząc, że częstość tłuczenia naczyń przez nią jest dziełem przypadku?

Zadanie 57. Ze zbioru n elementów, wśród, których jest n_1 elementów mających cechę C i $n_2 = n - n_1$ elementów nie mających cechy C , losujemy dwukrotnie po jednym elemencie. Obliczyć prawdopodobieństwo, tego, że obydwa wylosowane elementy mają cechę C . Przyjąć $n = 10$ i $n_1 = 7$.

Zadanie 58. Rzucamy dwiema jednakowymi kostkami do gry. Obliczyć prawd. wyrzucenia sumy oczek równej 3, jeżeli wiadomo, że na pierwszej kostce wypadła jedynka.

Zadanie 59. W urnie jest dwanaście kul, 6 białych i 6 czarnych. Losujemy bez zwracania dwie kule. Oblicz prawd. wylosowania za drugim razem kuli czarnej pod warunkiem, że za pierwszym razem wylosowano kulę białą.

Zadanie 60. W urnie znajduje się dziewięć kul. Trzy białe, 3 zielone i 3 czarne. Losujemy kolejno dwie kule bez zwracania. Obliczyć prawd. wylosowania za pierwszym i drugim razem kuli zielonej.

Zadanie 61. Z talii 52 kart losujemy 5 kart. Obliczyć prawd. wylosowania dwóch kierów, jeżeli wiadomo, że wśród wylosowanych kart nie ma ani pików, ani trefli.

Zadanie 62. Opiekun 20 osobowej grupy studenckiej, w której (jak się później okazało) było 8 studentów aktywnych społecznie, wytypował na okres dwu tygodni (aby dać czas na poznanie się grupy) trzyosobowy samorząd grupy. Jakie jest prawd. tego, że taki samorząd składać się będzie z samych studentów aktywnych społecznie?

Zadanie 63. Spośród cyfr $1, 2, \dots, 9$ wylosowana bez zwrotu kolejno trzy cyfry C_1, C_2, C_3 układając je w kolejności losowania w liczbę, która w układzie dziesiętnym ma zapis $C_1C_2C_3$. Przyjmując sensowne założenie, że wszystkie możliwe do otrzymania w ten sposób liczby są jednakowo prawd. obliczyć prawd. tego, że $C_1C_2C_3 < 444$

Zadanie 64. Trzy ściany czworościanu zostały pomalowane na białą, czerwono i zielono, zaś czwarta ściana w pasy białą-czerwono-zieloną. Doświadczenie polega na rzucaniu czworościanem na płaszczyznę i obserwowaniu koloru ściany, na którą upadł czworościan. Zd. B, C, Z określone są następująco

- B - czworościan upadł na ścianę białą
- C - czworościan upadł na ścianę czerwoną
- Z - czworościan upadł na ścianę zieloną

zbadać czy zdarzenia A, B, C są a) niezależne parami, b) niezależne wzajemnie.

Zadanie 65. Rzucamy jeden raz kostką jednorodną do gry. Niech A zdarzenie polegające na wyrzuceniu nieparzystej liczby oczek, a B - zd. polegające na wyrzuceniu liczby oczek podzielnej przez 3. Czy zdarzenia A, B są niezależne?

Zadanie 66. Z talii 52 kart losujemy jedną. Niech A - zd. polegające na wylosowaniu asa, a B -zd. polegające na wylosowaniu kiera. Czy zd. A, B są niezależne.

Zadanie 67. Z danych ZUS wynika, że 70-letnia kobieta ma 70% szans na osiągnięcie wieku co najmniej 85 lat, podczas gdy 70 letni mężczyzna ma 55% szans dożycia do co najmniej 85 lat. Jakie jest prawd. wspólnego dożycia przez 70-letnich małżonków do co najmniej 85 lat?

Zadanie 68. Studenci wydziału elektroniki muszą zdać w I semestrze trzy egzaminy: z fizyki (A), analizy mat. (C) i z algebry (B). Z danych dziekanatu wynika, że 70% studentów zalicza I semestr, a 90% zdaje egzamin z fizyki. Jeżeli student zaliczy algebrę i fizykę, to prawd., że zda analizę wynosi $4/5$. Jakie jest prawd., że student, który zdał fizykę, zda algebrę?

Zadanie 69. Rzucamy dwa razy symetryczną kostką

- Jakie jest prawd. wyrzucenia różnej liczby oczek?
- Jakie jest prawd. wyrzucenia różnej liczby oczek, jeżeli suma oczek wynosi 11?

6 Prawdopodobieństwo całkowite i wzór Bayesa

Zadanie 70. Mamy dwie urny z białymi i czarnymi kulami. W pierwszej urnie jest pięć kul białych i trzy czarne, a w drugiej jest 6 kul białych i 2 czarne. Z losowo wybranej urny losujemy jedną kulę. Obliczyć prawd. zdarzenia polegającego na tym, że będzie to kula czarna.

Zadanie 71. W dwóch urnach umieszczone są kule. W pierwszej 4 białe, 5 czarnych i 3 niebieskie, a w drugiej 2 białe, 4 czarne i 2 niebieskie. Rzucamy jeden raz symetryczną monetą. Jeżeli wypadnie reszka, to losujemy jedną kulę z urny pierwszej, jeżeli wypadnie orzeł, to z drugiej. Oblicz prawd. wylosowania kuli czarnej.

Zadanie 72. W dwóch urnach znajdują się kule białe i czarne, przy czym w pierwszej jest 6 białych i 4 czarne, a w drugiej 5 białych i 5 czarnych. Rzucamy jeden raz kostką. Jeżeli wypadnie co najmniej 4 oczka, to losujemy 2 kule z pierwszej urny, jeżeli wyrzucimy co najwyżej 3, to losujemy 2 kule z drugiej urny. Oblicz prawd wylosowania 2 kul białych.

Zadanie 73. Egzaminator, do którego zgłosił się student na egzamin, przedstawia mu dwa jednakowo liczne, ale różne co do składu zestawy pytań informując jednocześnie, że za chwilę rzuci kostką do gry. Jeżeli wypadnie parzysta liczba oczek, to zada mu pytanie z pierwszego zestawu, jeżeli wypadnie nieparzysta liczba oczek, to z drugiego zestawu. Oblicz prawd. tego, że student odpowie na jedno pytanie, jeżeli wiadomo, że zestawy zawierają 30 pytań i z pierwsze zestawu student zna odpowiedź na 20 pytań, z drugiego zna odpowiedź na 12 pytań.

Zadanie 74. Na stole leży 5 długopisów. Każde przypuszczeni (hipoteza) dotyczące liczby zepsutych długopisów jest jednakowo prawdopodobne. Wybrany losowo długopis okazał się zepsuty. Które przypuszczenie dotyczące liczby zepsutych długopisów jest najbardziej prawd.?

Zadanie 75. Telegraficzne przesyłanie informacji polega na wysyłaniu sygnałów: 0 albo 1. Przy przesyłaniu 0 przekłamanie występuje 2 razy na 30, przy przesyłaniu 1 przekłamanie występuje 2 razy na 40. Stosunek liczby wysłanych 0 do liczby wysłanych 1 wynosi 5:3. Oblicz prawd. że

1. wysłano 0, jeżeli wiadomo, że odebrano 0
2. wysłano 1, jeżeli wiadomo, że odebrano 1
3. wysłano 1, jeżeli wiadomo, że odebrano 0

7 Zmienne losowe

Zadanie 76. Zakładając, że stosunek ocen bardzo dobrych, dobrych, dostatecznych i niedostatecznych ma się tak, jak 1:3:4:2, wyznaczyć dla określonej tam zmiennej losowej X :

- funkcję prawdopodobieństwa i jej wykres
- dystrybucję i jej wykres
- prawdopodobieństwo $P(X < 3.5)$ korzystając:
 1. z funkcji prawdopodobieństwa
 2. z dystrybucji
- prawdopodobieństwo $P(3 \leq X \leq 4.5)$ korzystając
 1. z funkcji prawdopodobieństwa
 2. z dystrybucji
- na wykresie dystrybucji podać interpretację prawdopodobieństwa $P(X = 3)$

Zadanie 77. Dystrybucja F zmiennej losowej X jest określona następującą tabelką

x	$(-\infty, -2]$	$(-2, 3]$	$(3, 5]$	$(5, +\infty)$
$F(x)$	0	0.4	0.5	1

Wyznaczyć funkcję prawdopodobieństwa tej zmiennej.

Zadanie 78. W wielu sytuacjach można przyjąć, że czas X bezawaryjnej pracy badanego urządzenia jest zmienną losową ciągłą o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \exp(-\frac{x}{\lambda}) & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad \text{dla pozostałych } x \end{cases} \quad (6)$$

Niech $\lambda = 10$

- Obliczyć prawdopodobieństwo $P(5 \leq X \leq 10)$
- Wyznaczyć dystrybuantę zmiennej losowej X
- Zinterpretować obliczone prawd. za pomocą wykresu gęstości i dystrybuanty.

Zadanie 79. Dobrać tak stałe α i β by funkcja określona wzorem $F(x) = \alpha + \beta \arctan x$ dla $-\infty < x < +\infty$

- była dystrybuantą zmiennej losowej X
- wyznaczyć gęstość zmiennej losowej X

Zadanie 80. Wyznaczyć stałą c tak, aby funkcja:

$$f(x) = \begin{cases} cx & , \quad 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & , \quad \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus [0, 3] \end{cases} \quad (7)$$

była funkcją gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej X .

Zadanie 81. Sprawdzić, czy funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ e^{-x} & , \quad x \geq 0 \end{cases} \quad (8)$$

jest gęstością prawdopodobieństwa. Znaleźć dystrybuantę $F(x)$. Obliczyć prawd. $P(X < \frac{1}{3})$ i $P(2 < X < 3)$.

Zadanie 82. Wiedząc, że funkcja gęstości zmiennej losowej X wynosi

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 3x^2 & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \quad x > 1 \end{cases} \quad (9)$$

- wyznaczyć dystrybuantę rozkładu
- obliczyć prawd. tego, że $x \in [0, 0.5]$