

Statystyka i rachunek prawdopodobieństwa

Filip A. Wudarski

22 maja 2013

1 Wstęp

Definicja 1. Statystyka matematyczna opisuje i analizuje zjawiska masowe przy użyciu metod rachunku prawdopodobieństwa.

Definicja 2. Populacja (zbiorowość) generalna - zbiór Z elementów podlegających badaniu ze względu na jedną lub więcej cech. Elementy tego zbioru mają przynajmniej jedną cechę wspólną i jedną cechę, która je różni od siebie.

Definicja 3. Próbka - skończony podzbiór Z_1 zbioru Z ($Z_1 \subset Z$), który badamy ze względu na interesującą nas cechę.

Próbka powinna stanowić reprezentację populacji Z , tzn. częstość występowania w próbie badanych cech nie powinna w znacznym stopniu różnić się od częstości występowania tych cech w populacji generalnej. W celu osiągnięcia tego elementy próbki zwykle losujemy spośród elementów zbioru Z . Otrzymujemy w ten sposób zbiór nazywamy **próbką losową**.

Próbka losowa prosta n -elementowa - jest to próbka wylosowana z populacji w taki sposób, że przed jej pobraniem każdy podzbiór składający się z n elementów populacji generalnej ma takie same szanse (to samo prawdopodobieństwo) wylosowania.

Definicja 4. Statystyka opisowa zajmuje się wstępnym opracowywaniem próbki bez posługiwania się rachunkiem prawdopodobieństwa.

2 Szereg rozdzielczy, histogram, łamana częstości

Niech

$$x_1, \dots, x_n \tag{2.1}$$

będzie n -elementową próbką losową.

Definicja 5. Rozstęp badanej cechy X w próbie (??) nazywamy różnicę

$$R = x_{\max} - x_{\min}, \tag{2.2}$$

gdzie $x_{\max}$, $x_{\min}$ oznaczają największą i najmniejszą liczbę ciągu (??).

Definicja 6. Klasa - Przedziały (najczęściej jednakowej długości), w których zakłada się, że wszystkie wartości posiadają tę samą wartość. W klasy grupujemy wyrazy dla próbek o większej ilości elementów (powyżej 30).

Klasy ustalmy zwykle na podstawie wzorów: $k \leq 5 \ln n$, $k = 1 + 3.322 \ln n$, $k = \sqrt{n}$. Można korzystać z tabeli

Liczba pomiarów n	Liczba klas k
30 - 60	6 - 8
60 - 100	7- 10
100 - 200	9 - 12
200 - 500	11 - 17
500 - 1500	16 - 25

Długość klasy określamy wzorem

$$b \approx \frac{R}{k}, \quad (2.3)$$

tak aby $bR \geq k$ (przybliżamy ją z nadmiarem).

Punkty graniczne klas ustalmy z dokładnością do $\frac{1}{2}\alpha$, gdzie α oznacza dokładność z jaką wyznaczona jest wartość w próbce.

Liczebność (liczność) i -tej próbki - liczba wartości próbki w i -tej klasie, oznaczamy n_i . Wiadomo, że

$$n = \sum_{i=1}^k n_i \quad (2.4)$$

Jeżeli liczność próbki kwalifikuje ją do podziału na klasy to otrzymujemy **szereg rozdzielczy**, który stanowią pary liczb: środki klas $\bar{x}_i$ oraz ich liczność n_i .

Zadanie 1. Z pewnej populacji wybrano próbkę $n = 50$ -elementową i przebadano ze względu na pewną cechę X .

Otrzymane wyniki: 3.6, 5.0, 4.0, 4.7, 5.2, 5.9, 4.5, 5.3, 5.5, 3.9, 5.6, 3.5, 5.4, 5.2, 4.1, 5.0, 3.1, 5.8, 4.8, 4.4, 4.6, 5.1, 4.7, 3.0, 5.5, 6.1, 3.8, 4.9, 5.6, 6.1, 5.9, 4.2, 6.4, 5.3, 4.5, 4.9, 4.0, 5.2, 3.3, 5.4, 4.7, 6.4, 5.1, 3.4, 5.2, 6.2, 4.4, 4.3, 5.8, 3.7

Sporządź histogram i szereg rozdzielczy.

Rozwiązanie:

Przyjmujemy, że liczba klas wynosi $k = 7$ (z tabeli). Liczba elementów $n = 50$, $x_{\max} = 6.4$, $x_{\min} = 3.0$, stąd rozstęp

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 6.4 - 3.0 = 3.4 \quad (2.5)$$

$$\frac{R}{k} \approx 0.49 \approx 0.5 = b \quad (2.6)$$

dokładność w tym przypadku wynosi $\alpha = 0.1$, więc dolna granica wynosi $x_{\min} - 0.05 = 2.95$.

Nr klasy i	Klasy	Grupowanie wartości próbki	środki klas $\bar{x}_i$	Liczebność klas n_i
1	2.95-3.45	III	3.2	4
2	3.45-3.95	IIII	3.7	5
3	3.95-4.45	IIII II	4.2	7
4	4.45-4.95	IIII III	4.7	9
5	4.95-5.45	IIII IIII II	5.2	12
6	5.45-5.95	IIII III	5.7	8
7	5.95-6.45	IIII	6.2	5

Histogram w zeszycie (z odłożonymi liczebnością n_i , częstością (frekwencją) $w_i = \frac{n_i}{n}$ (wyrażone w procentach), lub w $v_i = \frac{w_i}{b}$ (pole równe 1)).

Łącząc punkty o współrzędnych $(\bar{x}_1 - b, 0)$, $(\bar{x}_i, v_i)$, $(i = 1, 2, \dots, k)$, $(\bar{x}_k + b, 0)$ otrzymujemy tzw. **łamaną częstości**, pole również jest równe 1.

3 Mediana i moda

Definicja 7. Mediana (wartość środkowa) m_e próbki $x_1, \dots, x_n$ - środkowa liczba w uporządkowanej niemalejąco próbce.

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)} \quad (3.1)$$

$$m_e = \begin{cases} x_{(n+1)/2} & \text{dla } n - \text{nieparzystego} \\ \frac{1}{2}(x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)}) & \text{dla } n - \text{parzystego} \end{cases} \quad (3.2)$$

Definicja 8. Moda (wartość modalna, dominanta) m_0 próbki $x_1, \dots, x_n$ o powtarzających się wartościach (najczęściej powtarzające się wartości, o ile istnieje) nie będąca $x_{\min}$ ani $x_{\max}$.

4 Średnie klasyczne

Definicja 9. Średnia arytmetyczna $\bar{x}$ liczb $x_1, \dots, x_n$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (4.1)$$

Definicja 10. Średnia arytmetyczna ważona

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i n_i \quad (4.2)$$

(w próbce wynik pomiaru x_i wystąpił n_i razy, gdzie $i = 1, 2, \dots, k$ i $\sum_{i=1}^k n_i = n$).
Interpretacja: współrzędne środka masy punktów materialnych o masach n_i .

Definicja 11. Średnia geometryczna $\bar{g}$ liczb $x_1, \dots, x_n \geq 0$

$$\bar{g} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \quad (4.3)$$

Jeśli wszystkie liczby $x_i > 0$, to

$$\log \bar{g} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log x_i \quad (4.4)$$

Definicja 12. Średnia geometryczna ważona

$$\bar{g} = \sqrt[n]{x_1^{n_1} \cdot \dots \cdot x_k^{n_k}} \quad , \quad n = \sum_{i=1}^k n_i \quad (4.5)$$

Definicja 13. Średnia harmoniczna $\bar{h}$ liczb $x_1, \dots, x_n \neq 0$

$$\bar{h} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right)^{-1} \quad , \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \neq 0 \quad (4.6)$$

Definicja 14. Średnia harmoniczna ważona

$$\bar{h} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{x_i} \right)^{-1} \quad (4.7)$$

Definicja 15. Średnia potęgowa rzędu r dodatnich liczb $x_1, \dots, x_n$, którą oznaczamy $\bar{p}^{(r)}$, nazywamy

$$\bar{p}^{(r)} = \sqrt[r]{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^r} \quad (4.8)$$

Między średnimi $\bar{x}, \bar{g}, \bar{h}, \bar{p}^{(r)}$ dodatnich liczb $x_1, \dots, x_n$ zachodzą następujące związki:

$$\bar{p}^{(-1)} = \bar{h} \quad , \quad \bar{p}^{(1)} = \bar{x} \quad , \quad \lim_{r \rightarrow 0} \bar{p}^{(r)} = \bar{g} \quad (4.9)$$

Średnie dla szeregu rozdzielczego oblicza się, stosując odpowiednie wzory na średnie ważne.

5 Miary rozproszenia

Miary rozproszenia (rozrzutu, rozsiania) próbki $x_1, \dots, x_n$. (Najprościej to rozrzut).

Definicja 16. Wariancja (dyspersja) s^2 próbki $x_1, \dots, x_n$ nazywamy średnią arytmetyczną kwadratów odchylenia poszczególnych wartości x_i od średniej arytmetycznej $\bar{x}$ próbki

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (5.1)$$

lub (równoważnie)

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2 \quad \text{lub} \quad s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 - (\bar{x} - a)^2 \quad (5.2)$$

przy dowolnym a .

Jeżeli w próbce x_i występuje n_i razy ($i = 1, 2, \dots, k$) $\sum_{i=1}^k n_i = n$ to mamy

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 n_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i^2 - \bar{x}^2 \quad (5.3)$$

taka wariancja określa nam moment bezwładności układu mas punktowych względem środka masy tego układu.

Definicja 17. Odchylenie standardowe pierwiastek z wariancji

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (5.4)$$

Definicja 18. Odchylenie przeciętne d_1 od wartości średniej $\bar{x}$ próbki $x_1, \dots, x_n$

$$d_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}| \quad (5.5)$$

Definicja 19. Odchylenie przeciętne d_2 od mediany m_e próbki $x_1, \dots, x_n$

$$d_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - m_e| \quad (5.6)$$

Definicja 20. Niech $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ oznacza uporządkowaną próbkę $x_1, x_2, \dots, x_n$. Wartości w uporządkowanej próbce dzielimy na dwie grupy: do pierwszej zaliczamy wszystkie wartości mniejsze od mediany i medianę, do drugiej wszystkie wartości większe od mediany. Kwartyłe Q_1 próbki $x_1, \dots, x_n$ nazywamy medianę pierwszej grupy, a kwartyłem górnym Q_3 medianę drugiej próbki.

Odchylenie ćwiartkowe jest zdefiniowane jako połowa różnic między górnym i dolnym kwartyłem:

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2} \quad (5.7)$$

Mamy jakąś próbkę, z której pobieramy r próbek, dla których można wyznaczyć odpowiednie charakterystyki. Jeżeli mamy dane N_i , $\bar{x}_i$, s_i^2 dla $i = 1, 2, \dots, r$, gdzie N_i liczność i -tej próbki, $\bar{x}_i$ średnia próbki i -tej i s_i^2 wariancja i -tej próbki. Wtedy wariancja s^2 , średnia arytmetyczna $\bar{x}$ połączonych r próbek wynosi.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^r \bar{x}_i N_i \quad (5.8)$$

$$s^2 = \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^r s_i^2 N_i}_{\text{war. wew.}} + \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^r (\bar{x}_i - \bar{x})^2 N_i}_{\text{war. zew.}} \quad (5.9)$$

gdzie $N = \sum_{i=1}^r N_i$.

6 Momenty i inne charakterystyki

Definicja 21. Moment zwykły m_l rzędu l próbki $x_1, \dots, x_n$ nazywamy średnią arytmetyczną l -tych potęg wartości x_i

$$m_l = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^l, \quad l \in$$

Definicja 22. Moment centralny M_l rzędu l próbki $x_1, \dots, x_n$ nazywamy średnią arytmetyczną l -tych potęg odchyłeń wartości x_i od średniej arytmetycznej $\bar{x}$ próbki

$$M_l = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^l, \quad l \in$$

Pierwszy moment centralny jest dla każdej próbki równy zero.

Definicja 23. Moment absolutny zwykły rzędu l próbki $x_1, \dots, x_n$ wyraża się wzorem

$$a_l = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i|^l \quad (6.1)$$

Definicja 24. Moment absolutny centralny b_l rzędu l

$$b_l = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|^l \quad (6.2)$$

Jeżeli wartości próbki pogrupowane są w k klasach o środkach $\bar{x}_i$ i licznosciach n_i , $i = 1, \dots, k$, to momenty wyrażają się wzorami:

- moment zwykły rzędu l (grupowy)

$$m_l = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \bar{x}_i^l n_i \quad (6.3)$$

- moment centralny rzędu l (grupowy)

$$M_l = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (\bar{x}_i - \bar{x})^l n_i \quad (6.4)$$

- absolutny moment zwykły rzędu l (grupowy)

$$a_l = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k |\bar{x}_i|^l n_i \quad (6.5)$$

- absolutny moment centralny rzędu l (grupowy)

$$b_l = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k |\bar{x}_i - \bar{x}|^l n_i \quad (6.6)$$

Dla rozkładów symetrycznych wszystkie momenty rzędów nieparzystych są równe zero.

Definicja 25. Skośność (współczynnik asymetrii) zdefiniowany jest jako

$$g_1 = \frac{M_3}{s^3} \quad (6.7)$$

gdzie s jest odchyleniem standardowym.

Definicja 26. Współczynnik koncentracji (skupienia) (kurtoza)

$$K = \frac{M_4}{s^4} \quad (6.8)$$

Definicja 27. Zmienność (współczynnik zmienności)

$$v = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\% \quad (6.9)$$

Noerównomierność (współczynnik nierównomierności)

$$H = \frac{d_1}{\bar{x}} \cdot 100\% \quad (6.10)$$

d_1 - odchylenie przeciętne od średniej.

7 Zdarzenia losowe

Ω - przestrzeń zdarzeń elementarnych

Definicja 28. Zdarzenie elementarne $\omega \in \Omega$ - poszczególne wyniki doświadczenia losowego.

Definicja 29. Doświadczenie losowe - realizacja określonego zespołu warunków, wraz z góry określonym zbiorem wyników

Definicja 30. Przeliczalnie addytywnym ciałem zdarzeń (σ - ciałem zdarzeń) przestrzeni Ω nazywamy niepustą klasę $\mathcal{Z}$ jej podzbiorów spełniających:

- i) $\Omega \in \mathcal{Z}$: cała przestrzeń zdarzeń elementarnych należy do tej klasy
- ii) $A \in \mathcal{Z} \Rightarrow A' \equiv A^c \in \mathcal{Z}$: dopełnienie dowolnego zbioru A (czyli $A' = \Omega \setminus A$) należącego do klasy $\mathcal{Z}$ jest elementem tej klasy.
- iii) $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{Z} \Rightarrow (A_1 \cup \dots \cup A_n \cup \dots) \in \mathcal{Z}$. Suma co najwyżej przeliczalnej liczby zbiorów należących do klasy $\mathcal{Z}$ również należy do tej klasy.

Rzucamy kostką:

$$\Omega = \{ \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\} \} \quad (7.1)$$

zdarzeniami losowymi mogą być:

- 1, 2, 3, 4, 5, 6
- liczby parzyste
- liczby nieparzyste
- itd.

Definicja 31. Zdarzenie losowe (zdarzenie) to każdy zbiór należący do addytywnego ciała $\mathcal{Z}$. Zdarzenie pewne to cały zbiór Ω , zdarzenie niemożliwe to $\emptyset$. A' to zdarzenie przeciwne do zdarzenia A .

7.1 Działanie na zdarzeniach

Działania na zdarzeniach jest analogiczne do działań na zbiorach.

Definicja 32. Koniunkcja (iloczyn) dwóch zdarzeń $A, B \in \mathcal{Z}$ nazywamy zdarzenie $A \cap B$ (oznaczane krócej AB), składające się z tych zdarzeń elementarnych, które należą zarówno do zdarzenia A jak i do zdarzenia B . Dla przeliczalnie wielu zdarzeń $\bigcap_{i \in T} A_i$, jest to zdarzenie należące do każdego zdarzenia A_i .

Definicja 33. Alternatywa (suma) zdarzeń $A, B \in \mathcal{Z}$ nazywamy zdarzenie $A \cup B$, składające się ze zdarzeń elementarnych ω , które należą co najmniej do jednego ze zdarzeń A, B . Dla przeliczalnie wielu zdarzeń $\bigcup_{i \in T} A_i$ to zdarzenie, które należy do co najmniej jednego zdarzenia A_i .

Definicja 34. Różnica $A \setminus B$ (oznaczana $A - B$) zdarzeń $A, B \in \mathcal{Z}$ nazywamy zdarzenie składające się z tych zdarzeń elementarnych ω , które należą do zdarzenia A , ale nie należą do zdarzenia B . W szczególności różnica $\Omega \setminus A$ jest zdarzeniem przeciwnym do A .

Definicja 35. Mówimy, że zdarzenie A **pociąga** zdarzenie B (albo, zdarzenie B jest **następstwem** zdarzenia A), co zapisujemy $A \subset B$, jeśli każde zdarzenie elementarne ω należące do zdarzenia A - również należy do zdarzenia B . Jeżeli $A \subset B$ i $B \subset A$, to mówimy, że zdarzenia są równe i zapisujemy $A = B$.

Definicja 36. Mówimy, że zdarzenia $A, B \in \mathcal{Z}$ **wykluczają się** (albo: **wyłączają się**), jeśli nie mają wspólnych zdarzeń elementarnych, tj. gdy ich koniunkcja jest zdarzeniem niemożliwym $AB = \emptyset$.

Mówimy, że zdarzenia $A_1, \dots, A_n, \dots$ **wykluczają się parami**, jeśli każde dwa spośród nich wykluczają się, czyli $A_i A_j = \emptyset$, gdy $i \neq j$.

Własności działań na zdarzeniach:

- a) $A \cap B = B \cap A$ przemienność koniunkcji zdarzeń
- b) $A \cup B = B \cup A$ przemienność alternatywy zdarzeń
- c) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ łączność koniunkcji zdarzeń
- d) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ łączność alternatywy zdarzeń
- e) $A \cap (B \cup C) = A \cap B \cup A \cap C$
 $A \cap (\bigcup_{i \in T} A_i) = \bigcup_{i \in T} (A \cap A_i)$
 rozdzielność koniunkcji zdarzeń względem alternatywy zdarzeń
- f) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
 $A \cup (\bigcap_{i \in T} A_i) = \bigcap_{i \in T} (A \cup A_i)$
 rozdzielność alternatywy zdarzeń względem koniunkcji zdarzeń
- g) $(A \cap B)' = A' \cup B'$
 $(\bigcap_{i \in T} A_i)' = \bigcup_{i \in T} A_i'$
 $(A \cup B)' = A' \cap B'$
 $(\bigcup_{i \in T} A_i)' = \bigcap_{i \in T} A_i'$
 Prawa De Morgana

8 Kombinatoryka

Definicja 37. Permutacje bez powtórzeń. A dowolny zbiór złożony z n -elementów

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \quad (8.1)$$

Permutacją bez powtórzeń n elementowego zbioru A (**permutacja bez powtórzeń n różnych elementów**) - nazywamy każdy n wyrazowy ciąg, w którym każdy element zbioru A występuje dokładnie raz. (Jest to po prostu uporządkowanie elementów danego zbioru wg jakiegoś kryterium)

$$P_n = n! \quad (8.2)$$

Liczba możliwych permutacji.

Definicja 38. Permutacje z powtórzeniami. A zbiór k -różnych elementów: $A = \{a_1, \dots, a_k\}$. Permutacją n elementową z powtórzeniami, w której element a_1 powtarza się n_1 razy, ..., element a_k powtarza się n_k razy oraz $n_1 + \dots + n_k = n$, nazywamy n -wyrazowy ciąg, w którym poszczególne elementy zbioru A powtarzają się wskazaną liczbę razy.

$$P_n^{n_1, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_k!} \quad (8.3)$$

Definicja 39. Wariacja bez powtórzeń. Niech A będzie zbiorem n różnych elementów. Każdy k wyrazowy ciąg k różnych elementów tego zbioru ($k \leq n$) nazywamy k -wyrazową wariacją bez powtórzeń z n -elementowego zbioru A .

$$V_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \equiv n^{[k]}, \quad k \leq n \quad (8.4)$$

Definicja 40. Wariacja z powtórzeniami. A zbiór n elementowy. Każdy k -wyrazowy ciąg (mogących się powtarzać) elementów tego zbioru, $k \leq n$, nazywamy k -wyrazową wariacją z powtórzeniami z n -elementowego zbioru A .

$$\bar{V}_n^k = n^k \quad (8.5)$$

Definicja 41. Kombinacje z powtórzeniami. A zbiór n elementowy (różne). Każdy k -elementowy ($k \leq n$) podzbiór zbioru A nazywamy k -elementową kombinacją bez powtórzeń n -elementowego zbioru A (lub kombinacją z n elementów po k elementów).

Np. $\{a, c\} \subset \{a, b, c, d\}$ jest 2-elementową kombinacją 4-elementowego zbioru (kolejność nie jest istotna).

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n^{[k]}}{k!} \quad (8.6)$$

Definicja 42. Kombinacje z powtórzeniami. Mamy elementy n różnych rodzajów. Elementy tego samego rodzaju traktujemy jako identyczne. Każdy zbiór (zestaw) składający się z k elementów ($k \leq n$), gdy każdy element należy do jednego z tych rodzajów, nazywamy k -elementową kombinacją z powtórzeniami z n rodzajów elementów.

Np. Z elementów 3 rodzajów ($n=3$) (oznaczymy je jako a, b, c) można utworzyć następujące 2-elementowe kombinacje

$$\{a, a\}, \{b, b\}, \{c, c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\} \quad (8.7)$$

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} \quad (8.8)$$

9 Prawdopodobieństwo

Definicja 43. Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa.

- Ω – przestrzeń zdarzeń elementarnych doświadczenia losowego D
- $\mathcal{Z}$ – zbiór zdarzeń elementarnych

Prawdopodobieństwo funkcja P przyporządkowującą każdemu zdarzeniu $A \in \mathcal{Z}$ liczbę $P(A)$ spełniającą

1. $P(A) \geq 0$ dla każdego zdarzenia $A \in \mathcal{Z}$
2. $P(\Omega) = 1$, (unormowanie)
3. Jeżeli $A_1, \dots, A_n, \dots$ jest dowolnym ciągiem parami rozłącznych zdarzeń ze zbioru $\mathcal{Z}$, to $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + \dots$ (przeliczalna addytywność)

Własności

1. $P(\emptyset) = 0$
2. Jeżeli A pociąg zdarzenie B , $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ oraz $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$
3. $P(A) \leq 1$, A dowolne
4. $P(A) + P(A') = 1$
5. prawdopodobieństwo alternatywy dwóch dowolnych zdarzeń (czyli prawdopodobieństwo zajścia co najmniej jednego z tych zdarzeń) jest równe sumie prawdopodobieństw tych zdarzeń zmniejszonej o prawdopodobieństwo ich koniunkcji, czyli

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

6. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa.

- Przestrzeń Ω składa się z n zdarzeń elementarnych, czyli $n(\Omega) = n$
- zdarzenia jednoelementowa $\{\omega_i\}$ są jednakowo prawdopodobne, czyli

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \dots = P(\{\omega_n\}) = \frac{1}{n}$$

Definicja 44. Prawdopodobieństwo warunkowe

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad P(B) > 0$$

jest to prawdopodobieństwo zdarzenia A obliczone przy założeniu, że zaszło zdarzenie B .
Stąd wynika wzór na prawdopodobieństwo koniunkcji (łącznego zajścia) zdarzeń

$$P(AB) = P(A)P(B|A) \quad P(A) > 0 \quad (9.1)$$

$$P(AB) = P(B)P(A|B) \quad P(B) > 0 \quad (9.2)$$

Definicja 45. Prawdopodobieństwo koniunkcji n zdarzeń. Dla $n = 3$ jest dane wzorem

$$P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB) \quad P(AB) > 0$$

dla n zdarzeń

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2 A_1) \dots P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1})$$

gdy $P(A_1 A_2 \dots A_{n-1}) > 0$

Definicja 46. Niezależność dwóch zdarzeń. Mówimy, że zdarzenia $A, B \in \mathcal{Z}$ są niezależne, gdy

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

równość ta nie wyklucza sytuacji, gdy $P(A) = 0$ lub $P(B) = 0$. Gdy oba są różne od zera wtedy

$$P(A|B) = P(A) \quad P(B|A) = P(B)$$

10 Prawdopodobieństwo całkowite i wzór Bayesa

Twierdzenie 47 (O prawdopodobieństwie całkowitym). B - dowolne zdarzenie, zdarzenia $A_1, \dots, A_n$ spełniają warunki

1. wykluczają się parami $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$
2. ich alternatywa jest zdarzeniem pewnym, czyli $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$

3. mają dodatnie prawdopodobieństwa $P(A_i) > 0$ dla $i = 1, \dots, n$

to prawdopodobieństwo zdarzenia B wyraża się równością

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + \dots + P(A_n)P(B|A_n) \quad (10.1)$$

zwaną wzorem na prawdopodobieństwo całkowite (zupełne)

Twierdzenie 48 (Bayesa). Jeżeli B jest dowolnym zdarzeniem o dodatnim prawdopodobieństwie $P(B) > 0$, zdarzenia $A_1, \dots, A_n$ zaś spełniają warunki 1,2,3 twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym, to prawdopodobieństwa warunkowe $P(A_k|B)$ zdarzeń A_k przy warunku B , $k = 1, \dots, n$ wyrażają się równościami

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)}, \quad k = 1, \dots, n \quad (10.2)$$

11 Zmienna losowa - jednowymiarowa

Definicja 49. Zmienna losowa. Ujęcie intuicyjne.

Zmienna losowa - przyjmuje wartość liczbową zależną od przypadku, a więc nie dającą się ustalić przed przeprowadzeniem doświadczenia.

Ujęcie matematyczne.

$(\Omega, \mathcal{Z}, P)$ - przestrzeń probabilistyczna. Zmienna losowa - dowolna funkcja X , określona na przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω o wartościach ze zbioru $\mathbb{R}$ mająca własności: dla dowolnej, ustalonej liczby rzeczywistej x zbiór zdarzeń elementarnych ω , dla których spełniona jest nierówność $X(\omega) < x$, jest zdarzeniem, czyli

$$\{\omega : X(\omega) < x\} \in \mathcal{Z} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (11.1)$$

Definicja 50. Prawdopodobieństwo $P(X \in A)$ przyjęcia przez zmienną losową X wartości ze zbioru A , $A \subset \mathbb{R}$, określamy równością

$$P(X \in A) = P(\{\omega : X(\omega) \in A\}) \quad (11.2)$$

gdzie A jest dowolnym zbiorem na prostej, np.: $A = \{x_0\}$, $A = [a, b]$, $A = (x_0, +\infty)$ itd. Dla $A = [a, b)$ mamy

$$P(X \in A) = P(a \leq X < b) = P(\{\omega : a \leq X(\omega) < b\}) \quad (11.3)$$

Definicja 51. Dystrybuenta zmiennej losowej $F(x)$ (lub $F_X(x)$)

$$F_X(x) = P(X < x) \quad x \in \mathbb{R} \quad (11.4)$$

Dystrybuentą zmiennej losowej X nazywamy funkcję F_X określoną na całym $\mathbb{R}$.

Dystrybuenta F dowolnej zmiennej losowej ma własności

1. $0 \leq F(x) \leq 1$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) \equiv F(-\infty) = 0$ oraz $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) \equiv F(\infty) = 1$
3. F jest niemalejąca
4. jest funkcją (co najmniej) lewostronnie ciągłą, czyli $\lim_{x \rightarrow x_0^-} F(x) = F(x_0)$
5. prawdopodobieństwo $P(a \leq X < b)$ przyjęcia przez zmienną losową X wartości z przedziału $[a, b)$ jest równe przyrostowi dystrybuanty F między punktami a, b , czyli $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$
6. prawdopodobieństwo $P(X = x_0)$ przyjęcia przez zmienną losową X dowolnej, ustalonej wartości x wyraża się za pomocą dystrybuanty F równością: $P(X = x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) - F(x_0)$
7. Jeżeli G jest dowolną funkcją o wartościach rzeczywistych mającą własności 2,3,4, to funkcja G jest dystrybuantą zmiennej losowej.

11.1 Zmienna losowa typu skokowego

Definicja 52. Zmienna losowa X jest typu skokowego (dyskretnego) jeżeli istnieje skończony albo przeliczalny zbiór $W_x = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ jej wartości $x_1, \dots, x_n, \dots$ taki, że

$$P(X = x_i) = p_i > 0 \quad i \in \sum_{i=1} p_i = 1$$

Definicja 53. Funkcja rozkładu prawdopodobieństwa. Funkcję p określoną na zbiorze W_x równością

$$p(x_i) = P(X = x_i) \equiv p_i \quad x_i \in W_x \quad (11.5)$$

lub przedstawione przy pomocy dwuwierszowej tablicy

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
p_i	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

spełniającą warunek unormowania ($\sum_i p_i = 1$) nazywamy *funkcją rozkładu prawdopodobieństwa* (lub funkcją prawdopodobieństwa) zmiennej losowej X

Definicja 54. Dystrybuanta zmiennej losowej typu skokowego:

- prawdopodobieństwo przyjęcia przez zmienną losową X wartości ze zbioru A $P(X \in A) = \sum_{x_i \in A} p_i$
- w szczególności $P(a < X < b) = \sum_{a < x_i < b} p_i$
- gdy $a = -\infty$ możemy wyznaczyć dystrybuantę F skokowej zmiennej losowej X : $F(x) = P(X < x) = \sum_{-\infty < x_i < x} p_i$

11.2 Zmienna losowa typu ciągłego

Definicja 55. Zmienna losowa X przyjmująca wszystkie wartości z pewnego przedziału (albo przedziałów), dla której istnieje nieujemna funkcja f taka, że dystrybuantę F zmiennej losowej X można przedstawić w postaci:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt \quad x \in \mathbb{R} \quad (11.6)$$

nazywamy zmienną losową absolutnie ciągłą (zmienną losową ciągłą, typu ciągłego), a funkcję f jej gęstością.

Pole obszaru ograniczonego wykresem gęstości f i osią Ox jest równe 1.

Jeżeli gęstość zmiennej losowej X $f(t) \neq 0$ tylko w (a, b) to rozkład jest skoncentrowany na przedziale (a, b) .

Własności zmiennej losowej typu ciągłego:

- jeżeli x jest punktem ciągłości gęstości f , to $F'(x) = f(x)$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$
- $P(a \leq x < b) = \int_a^b f(x)dx$