1 Wektory

Co to jest wektor? Jest to obiekt posiadający: moduł (długość), kierunek wraz ze zwrotem.

1.1 Dodawanie wektorów graficzne i algebraiczne.

Graficzne - metoda równoległoboku.

- Sprowadzamy wektory do tego samego punktu zaczepienia. Podczas tej operacji nie zmieniamy długości, kierunku ani zwrotu wektora.
- Przez koniec każdego z wektorów prowadzimy prostą równoległą do drugiego wektora.
- Rysujemy wektor, który jest zaczepiony w tym samym miejscu, natomiast jego „koniec" znajduje się w miejscu przecięcia się obu prostych równoległych. Innymi słowami rysujemy przekątną utworzonego równoległoboku.

Graficzne - metoda trójkąta

- Zaczepiamy jeden wektor w końcu drugiego wektora. Zachowujemy długość, kierunek i zwrot.
- Początek pierwszego wektora jest początkiem wektora sumy, natomiast koniec wektora sumy jest ulokowany na końcu drugiego wektora.

Zadanie 1. Pokazać graficznie, że metoda trójkąta jest równoznaczna metodzie równoległoboku.

Co robimy z odejmowaniem? Odejmowanie wektora $\vec{a} - \vec{b}$ można potraktować jako $\vec{a} + (-\vec{b})$ czyli jako sumę wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$, z tą różnicą, że wybieramy wektor $\vec{b}$ z przeciwnym zwrotem.

Zadanie 2. Dodaj wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ metodą graficzną. (4 zadania: 2 równoległoboku, 2 trójkąta, po jednym w każdej metodzie będzie z odejmowaniem).

Metoda algebraiczna. Każdy wektor jest przedstawiony poprzez swoje współrzędne $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Sumę wektorów $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$.

Mnożenie wektora przez skalar, sprowadza się do przemnożenia wszystkich składowych przez tę liczbę: $\alpha\vec{a} = \vec{a}\alpha = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n)$. Graficznie przedstawienie: jeżeli $\alpha > 1$, to wektor $\vec{a}$ wydłużamy α razy, jeżeli $0 < \alpha < 1$ to wektor skracamy α razy. Jeżeli $\alpha = -1$ to wektor zmienia zwrot.

Zadanie 3. Dodaj wektory i uprość wyrażenia.

- $\vec{a} = (\frac{1}{2}, 0.3, \frac{13}{7})$, $\vec{b} = (0.25, \frac{2}{5}, \frac{20}{42})$: $\vec{c} = (0.75, 0.5, \frac{7}{3})$
- $\vec{a} = (-\frac{3}{8}, 0.017, 2^3)$, $\vec{b} = (0.125, \frac{53}{40}, -3.62)$: $\vec{c} = (-\frac{1}{4}, 1.342, 4.38)$

- $\vec{a} = \frac{1}{5}(-\frac{5}{17}, 0.042, -5.5)$, $\vec{b} = (-\frac{30}{68}, 1.0734, 1.1)$: $\vec{c} = (\frac{1}{2}, 1.0818, 0)$
- $\vec{a} = (\frac{1}{2}, 0.3, -\frac{1}{2})$, $\vec{b} = (3.8(3), 0.7, \frac{1}{6})$, $\vec{c} = (-\frac{16}{12}, \frac{23}{20}, -\frac{1}{12})$: $\vec{d} = (3, \frac{43}{20}, -\frac{7}{12})$

1.2 Kombinacja liniowa wektorów

Kombinacja liniowa wektorów $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{d}$.

Definicja 1. Mówimy, że między n wektorami $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ istnieje liniowa zależność, gdy istnieje n liczb $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ z których nie wszystkie są równe zero i dla których zachodzi

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0} \tag{1.1}$$

Jeżeli przy powyższych założeniach taka zależność nie zachodzi mówimy, że wektory są liniowo niezależne.

Zadanie 4. Czy wektory są liniowo zależne? $\vec{a} = (1, -2)$ oraz $\vec{b} = (2, 4)$. Sprawdzamy czy $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$, więc:

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta &= 0 \\ -2\alpha + 4\beta &= 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

$\alpha = -2\beta$, wstawiając do drugiego równania mamy $8\beta = 0$, więc $\beta = 0$. Gdy $\beta = 0$ to i $\alpha = 0$. Więc nie istnieją takie α i β, które jednocześnie są różne od zera, żeby była spełniona $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0$. Wniosek: są liniowo niezależne.

Zadanie 5. Czy wektory $a,\ b,\ c$ są liniowo zależne czy niezależne?

- $a = (1, 0, 3),\ b = (1/2, 1, 1),\ c = (0, -1/2, 1/2)$

Dwa przykłady losowe.
Rozwiązanie: Tworzymy macierz wektorów, czyli ustawiamy wektory w tabelkę postaci

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Liczymy wyznacznik tej macierzy tzn.

$$\det A = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) - 3 \cdot 1 \cdot 0 - 0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot 1 \cdot (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} \tag{1.4}$$

Ponieważ wyznacznik jest różny od zera, to wektory te są liniowo niezależne.

Zadanie 6. Dane są trzy wektory $\vec{a} = (1, -1)$, $\vec{b} = (4, 3)$ i $\vec{c} = (-10, -11)$. Przedstawić wektor $\vec{c}$ jako kombinację liniową wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{c}$. Więc

$$\begin{aligned} \alpha + 4\beta &= -10 \\ -\alpha + 3\beta &= -11 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Z pierwszego $\alpha = -(10 + 4\beta)$, wstawiając do drugiego $3\beta + 10 + 4\beta = -11$, więc $7\beta = -21$, to $\beta = -3$ i $\alpha = 2$.

Zadanie 7. Dane są 4 wektory $\vec{a} = (5, -2, 0)$, $\vec{b} = (0, -3, 4)$, $\vec{c} = (-6, 0, 1)$, $\vec{d} = (25, -22, 16)$. Przedstawić wektor $\vec{d}$ jako kombinację liniową wektorów $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{d}$. Mamy układ równań

$$\begin{aligned} 5\alpha - 6\gamma &= 25 \\ -2\alpha - 3\beta &= -22 \\ 4\beta + \gamma &= 16 \end{aligned}$$

Zadanie 8. Dane są trzy wektory

- $\vec{a} = (1, 2, 5)$, $\vec{b} = (2, 4, -1)$, $\vec{c} = (6, -1, -1)$.
- $\vec{a} = (6, 4, 2)$, $\vec{b} = (-9, 6, 3)$, $\vec{c} = (-3, 6, 3)$
- $\vec{a} = (2, -5, 3)$, $\vec{b} = (-4, 10, -6)$, $\vec{c} = (1, 0, 1)$.

Czy można przedstawić wektor $\vec{c}$ jako kombinację liniową wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$?

Nie. Wektory $\vec{a}$, $\vec{b}, \vec{c}$ są liniowo niezależne.

Tak. $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$.

Nie. Wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są współliniowe.

1.3 Wektor i jego składowe

Każdy wektor posiada składowe. Można więc przedstawić go przy pomocy tzw. wektorów jednostkowych $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ (przypadek 3D). Wektory jednostkowe mają składowe:

$$\begin{aligned} \vec{i} &= (1, 0, 0) \\ \vec{j} &= (0, 1, 0) \\ \vec{k} &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

Więc dowolny wektor $\vec{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3) \equiv (a_x,\ a_y,\ a_z)$ można przedstawić jako

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \tag{1.6}$$

Wektory $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ są wzajemnie do siebie prostopadłe i mają długość jeden.

1.4 Iloczyny skalarny

Iloczyn skalarny wektorów $\vec{a} \cdot \vec{b}$ zdefiniowany jest:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\left(\angle(\vec{a}, \vec{b})\right) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \tag{1.7}$$

gdzie $(\angle(\vec{a}, \vec{b}) \equiv \phi$ oznacza kąt pomiędzy wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$, a $|\vec{a}|$ oznacza długość wektora zdefiniowaną jako

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{1.8}$$

Powyższa definicja jest dla przypadku 3-wymiarowego. Można w łatwy sposób zdefiniować iloczyn skalarny dla dowolnego wymiaru, np. jako:

$$a \cdot b = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i, \tag{1.9}$$

gdzie a_i i b_i są składowymi wektorów a i b (strzałka nad wektorami została pominięta). Długość wektora jest zdefiniowana analogicznie dla wyżej wymiarowych przypadków. Rezultatem iloczynu skalarnego jest **skalar**!

Jak wyznaczyć kąt zawarty pomiędzy dwoma wektorami?

Korzystamy ze wzoru na iloczyn skalarny

$$\cos(\phi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \Rightarrow \phi = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right) \tag{1.10}$$

Jak obliczyć kąt pomiędzy wektorem a odpowiednimi osiami?

Znowu wystarczy skorzystać ze wzrou na iloczyn skalarny. W tym wypadku bierzemy nasz wektor i wektory jednostkowe $\vec{i}$, $\vec{j}$ oraz $\vec{k}$.

$$\begin{aligned} a_x = |a| \cos\alpha &= \vec{a} \cdot \vec{i} \\ a_y = |a| \cos\beta &= \vec{a} \cdot \vec{j} \\ a_z = |a| \cos\gamma &= \vec{a} \cdot \vec{k} \end{aligned} \tag{1.11}$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$ i $\cos\gamma$ są tzw. *cosinusami kierunkowymi* wektora $\vec{a}$ i spełniają zależność

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \tag{1.12}$$

Zadanie 9. Pokazać powyższą zależność.
Wystarczy podstawić:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a_x^2}{|a|^2} + \frac{a_y^2}{|a|^2} + \frac{a_z^2}{|a|^2} = \frac{\overbrace{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}^{|a|^2}}{|a|^2} = 1 \tag{1.13}$$

Zadanie 10. Kiedy $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$?
Iloczyn skalarny może wynosić zero jeżeli wektory są do siebie prostopadłe, lub co najmniej jeden z wektorów jest wektorem zerowym. Prostopadłość oznacza, że kąt zawarty pomiędzy wektorami wynosi $\frac{\pi}{2}$, natomiast $\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

Zadanie 11. Oblicz iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$, jeżeli:

- $|a| = 5$, $|b| = 6$, $\angle(a, b) = \frac{\pi}{3}$
- $|a| = 2$, $|b| = 4$, $\angle(a, b) = \frac{2\pi}{3}$
- $|a| = 1$, $|b| = 5$, $\angle(a, b) = \pi$

Korzystamy z wzoru na iloczyn skalarny: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |a||b|\cos\varphi$, podstawiając otrzymujemy

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot 6 \cos\frac{\pi}{3} = 30 \cdot 0.5 = 15$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 4 \cos(\frac{2\pi}{3}) = 8 \cdot (-0.5) = -4$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 5 \cos(\pi) = -5$

Zadanie 12. Oblicz iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$, jeżeli $\vec{a} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$, $\vec{b} = -2\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2$, gdzie $\vec{e}_1$ i $\vec{e}_2$ są jednostkowymi wektorami wzajemnie prostopadłymi.
Rozpisując iloczyn skalarny otrzymujemy:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -6\underbrace{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1}_{=1} - 15\underbrace{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2}_{=0} + 4\underbrace{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1}_{=0} + 10\underbrace{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2}_{=1} = 4 \tag{1.14}$$

Zadanie 13. Znaleźć długość wektora $\vec{a} = 6\vec{e}_1 - 8\vec{e}_2$, gdzie $\vec{e}_1$ i $\vec{e}_2$ są jednostkowymi wektorami wzajemnie prostopadłymi.
Analogicznie postępujemy jak w poprzednim zadaniu (wykorzsytujemy prostopadłość wektorów, których iloczyn skalarny znika), lecz tym razem korzystamy z wzoru na długość wektora.

$$|a| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{36 + 64} = 10 \tag{1.15}$$

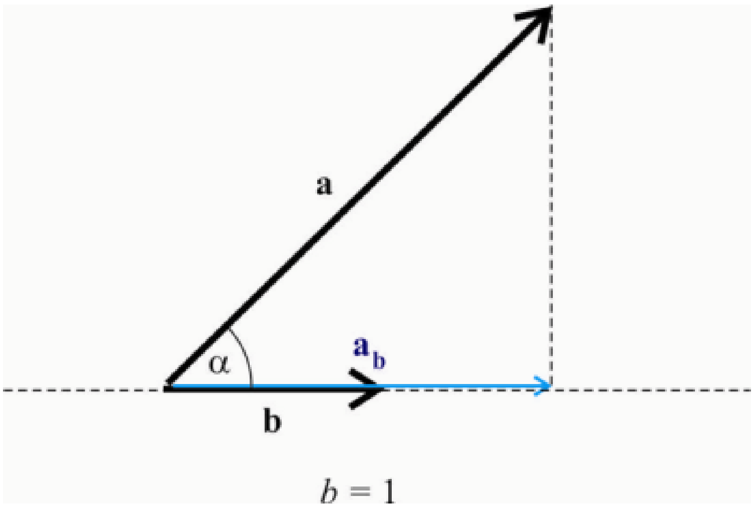
1.5 Rozkład wektora na składowe i rzutu wektora.

Z właściwości iloczynu skalarnego wynika: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$, więc

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \tag{1.16}$$

Z definicji cosinusa mamy natomiast:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{a}_b|}{|\vec{a}|} \tag{1.17}$$



gdzie $\vec{a}_b$ jest rzutem wektora $\vec{a}$ na wektor $\vec{b}$. Łącząc powyższe wyrażenia otrzymujemy:

$$|\vec{a}|_b = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \tag{1.18}$$

Jest to długość wektora rzutu. Teraz należy go przemnożyć przez wektor jednostkowy w kierunku $\vec{b}$, tzn. przez

$$\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \tag{1.19}$$

ostatecznie wektor rzutu wyraża się przez formułę:

$$\vec{a}_b = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b} \tag{1.20}$$

Na naszym rysunku wektor $\vec{b}$ jest długości jednostkowej, więc wyrażenie upraszcza się do $\vec{a}_b = (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{b}$.
Jest to składowa równoległa oznaczana czasami $\vec{a}_b = \vec{a}_\parallel$. Każdy wektor można jednoznacznie rozłożyć na składową równoległą i prostopadłą, tzn.

$$\vec{a} = \vec{a}_\perp + \vec{a}_\parallel \tag{1.21}$$

Składowa równoległa wyraża się natomiast wzorem

$$\vec{a}_\perp = \vec{a} - \vec{a}_\parallel \tag{1.22}$$

Zadanie 14. Rozłożyć wektor $\vec{w}$ na składowe wzdłuż wektorów

- $\vec{w} = (3, 2)$, $\vec{a} = (1, 0)$, $\vec{b} = (0, 1)$.
- $\vec{w} = (-2, 5)$, $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (-1, 3)$
- $\vec{w} = (3, 2, -\frac{1}{2})$, $\vec{a} = (2, 1, 0)$, $\vec{b} = (-1, 0, 3)$, $\vec{c} = (1, 1, 1)$.

Korzystamy z definicji rzutu:

$$\vec{w}_a = \frac{\vec{a} \cdot \vec{w}}{|\vec{a}|^2}(1, 0) = (3, 0) \tag{1.23}$$

$$\vec{w}_b = \frac{\vec{b} \cdot \vec{w}}{|\vec{b}|^2}(0, 1) = (0, 2) \tag{1.24}$$

Drugi przykład:

$$\vec{w}_a = \frac{\vec{a} \cdot \vec{w}}{|\vec{a}|^2}(2, 1) = \frac{-4 + 5}{5}(2, 1) = (\frac{2}{5}, \frac{1}{5}) \tag{1.25}$$

$$\vec{w}_b = \frac{\vec{b} \cdot \vec{w}}{|\vec{b}|^2}(-1, 3) = \frac{2 + 15}{10}(-1, 3) = (-\frac{17}{10}, \frac{51}{10}) \tag{1.26}$$

W trzecim przypadku mamy 3 wektory, na które rzutujemy, więc trzeba wykonać trzy rzuty.

$$\vec{w}_a = \frac{\vec{a} \cdot \vec{w}}{|\vec{a}|^2}(2, 1, 0) = \frac{6 + 2}{5}(2, 1, 0) = (\frac{16}{5}, \frac{8}{5}, 0) \tag{1.27}$$

$$\vec{w}_b = \frac{\vec{b} \cdot \vec{w}}{|\vec{b}|^2}(-1, 0, 3) = \frac{-3 - 1.5}{10}(-1, 0, 3) = (\frac{9}{20}, 0, -\frac{27}{20}) \tag{1.28}$$

$$\vec{w}_c = \frac{\vec{c} \cdot \vec{w}}{|\vec{c}|^2}(1, 1, 1) = \frac{3 + 2 - 0.5}{3}(1, 1, 1) = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}) \tag{1.29}$$

Zadanie 15. Rozłóż wektory na składowe prostopadłą i równoległą wzdłuż wektora $b = (1, 0, -1/3)$

- $a = (0, 1, 1/2)$
- $c = (-1, -1, 0.75)$