1 Szereg Taylora

Definicja 1 (Szereg Taylora)**.** Szereg potęgowy postaci

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (1.1)$$

nazywamy Szeregiem Taylora. Funkcja jest rozwijalna w szereg Taylora, jeżeli posiada pochodne każdego rzędu.

Definicja 2 (Wzór Maclaurina)**.** Jeżeli we wzorze Taylora przyjmiemy $a = 0$, to otrzymamy tzw. wzór Maclaurina

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!}x^n \quad (1.2)$$

Zadanie 1. Rozwinąć na szereg Maclaurina funkcję $f(x) = e^x$.
Przykład ten jest bardzo łatwy, ponieważ każda pochodna funkcji e^x wynosi tyle samo, mianowicie e^x. Co więcej funkcja $f(x = 0) = e^0 = 1$, więc

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overbrace{f^n(0)}^{=1}}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \quad (1.3)$$

Uwaga 1. Powyższy szereg można przyjąć za definicję funkcji e^x, z której od razu widać, że

$$e^0 = 1 \quad , \quad \left(e^x\right)' = e^x \quad (1.4)$$

Uwaga 2. Przy użyciu szeregu Taylora (czy jak w tym przypadku Maclaurina) możemy obliczyć z dowolną dokładnością wartość funkcji w odpowiednim punkcie, w szczególności zobaczyć ile wynosi liczba e.

$$\begin{aligned} \frac{1}{3!} &= \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4!} &= \frac{1}{24} \\ \frac{1}{5!} &= \frac{1}{120} \\ \frac{1}{6!} &= \frac{1}{720} \end{aligned}$$

łącząc pierwszych 6 wyrazów mamy

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} \approx 2.71806 \quad (1.5)$$

natomiast wartość liczby e to

$$e \approx 2.718281 \tag{1.6}$$

uwzględnienie większej liczby wyrazów zbliżyłoby nas do tej wartości, natomiast cały szereg jest zbieżny do ścisłej wartości liczby e.

Zadanie 2. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x & (1.7)\\ f(x) &= \cos x & (1.8) \end{aligned}$$

W obu przypadkach należy policzyć odpowiednie pochodne funkcji. Zacznijmy od sinusa.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x \\ f'(x) &= \cos x \\ f''(x) &= -\sin x \\ f'''(x) &= -\cos x \\ f^{(iv)}(x) &= \sin x \end{aligned} \tag{1.9}$$

jak widzimy w czwartej pochodnej wróciliśmy do punktu wyjścia. Teraz zobaczmy jakie wartości przyjmuje ta funkcja w punkcie $x = 0$

$$\begin{aligned} f(0) &= \sin 0 = 0 \\ f'(0) &= \cos 0 = 1 \\ f''(0) &= -\sin 0 = 0 \\ f'''(0) &= -\cos 0 = -1 \\ f^{(iv)}(0) &= \sin 0 = 0 \end{aligned} \tag{1.10}$$

czyli szereg Maclaurina wygląda następująco

$$\sin x = 0 + 1 \cdot x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots \tag{1.11}$$

jak widać w sumie niezerowymi elementami są wyłącznie wyrazy nieparzyste, czyli ostatecznie można wyrazić funkcję sinus jako

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{1.12}$$

Weźmy tak samo postąpmy z funkcją cosinus

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x \\ f'(x) &= -\sin x \\ f''(x) &= -\cos x \\ f'''(x) &= \sin x \\ f^{(iv)}(x) &= \cos x \end{aligned} \tag{1.13}$$

pochodne te przyjmują wartość w punkcie $x = 0$

$$\begin{aligned} f(0) &= \cos 0 = 1 \\ f'(0) &= -\sin 0 = 0 \\ f''(0) &= -\cos 0 = -1 \\ f'''(0) &= \sin 0 = 0 \\ f^{(iv)}(0) &= \cos 0 = 1 \end{aligned} \tag{1.14}$$

czyli szereg to

$$\cos x = 1 + 0x + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots \tag{1.15}$$

tutaj ostają się wyłącznie wyrazy przy parzystych potęgach x, więc można zapisać ogólną postać

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \tag{1.16}$$

Zadanie 3. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcje

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x}} \\ f(x) &= \ln(1+x) && (1.17) \\ f(x) &= \arctan x && (1.18) \end{aligned}$$

Liczymy kolejne pochodne

$$\begin{aligned} f(x) &= (\sqrt{1+x})^{-1} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} \\ f'(x) &= -\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}} \\ f''(x) &= \frac{3}{4}(1+x)^{-\frac{5}{2}} \\ f''' &= -\frac{15}{8}(1+x)^{-\frac{7}{2}} \end{aligned}$$

Czyli dla $x = 0$mamy

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f'(0) &= -\frac{1}{2}1 \\ f''(0) &= \frac{3}{4} \\ f'''(0) &= -\frac{15}{8} \end{aligned}$$

czyli

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2! \cdot 2^2}x^2 - \frac{3 \cdot 5}{3! \cdot 2^3}x^3 + \dots \tag{1.19}$$

Zróbmy to samo z kolejnym zadaniem, gdzie $f(x) = \ln(1+x)$

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+x) \\ f'(x) &= \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \\ f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2} \\ f'''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3} = 2(1+x)^{-3} \end{aligned} \tag{1.20}$$

dla $x = 0$ jest

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f'(0) &= 1 \\ f''(0) &= -1 \\ f'''(0) &= 2 \end{aligned} \tag{1.21}$$

więc

$$f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots \tag{1.22}$$

W następnym przykładzie mamy funkcję $f(x) = \arctan x$, więc

$$\begin{aligned} f(x) &= \arctan x \\ f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} \\ f''(x) &= \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \\ f'''(x) &= \frac{-2(1+x^2)^2 + 8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} \end{aligned} \tag{1.23}$$

dla $x = 0$ mamy

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f'(0) &= 1 \\ f''(0) &= 0 \\ f'''(0) &= -2 \end{aligned} \tag{1.24}$$

więc

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \tag{1.25}$$