Przykłady „interesujących” rozwiązań.

Zadanie 1. Oblicz pochodną

$$f(x) = x^{\sin(x)} + \frac{\cos^2(x)}{\cos(2x)} \tag{1}$$

To zadanie można zrobić na kilka sposobów. Ważne jest aby opisywać swój tok rozumowania, to pozwala dostrzec własne słabości w rozumowaniu pojęć, oraz sprawia, że notatki stają się bardziej transparentne. Wszystko to ułatwia przyszłą naukę.
Przejdźmy do rozwiązania. Wyrażenia pogrubione lub podkreślone są najistotniejszymi elementami, reszta jest opisem, który w ogólności (z braku czasu) można pominąć.

Przykład 1

Funkcję $f(x)$ dzielimy na dwie funkcję $f(x) = h(x) + g(x)$. Gdzie $h(x) = x^{\sin(x)}$ i $g(x) = \frac{\cos^2(x)}{\cos(2x)}$. Będziemy korzystać z faktu, że pochodna sumy funkcji równa jest sumie pochodnych funkcji, tzn. $\underline{f'(x) = h'(x) + g'(x)}$. Obliczmy najpierw $h'(x)$. Wykonajmy logarytm obu stron, otrzymamy wtedy:

$$\ln\Big[h(x)\Big] = \ln\Big[x^{\sin(x)}\Big] = \sin(x)\ln(x) \tag{2}$$

powyżej skorzystaliśmy z własności logarytmu: $\ln a^b = b \ln a$.
Obliczmy teraz pochodną wyrażenia (2). **Możemy tak zrobić, ponieważ funkcja logarytm jest różnowartościowa**.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\Big[h(x)\Big] = \frac{h'(x)}{h(x)} \tag{3}$$

Liczymy tę pochodną jak zwyczajną pochodną funkcji złożonej. Prawa strona natomiast jest pochodną iloczynu, więc mamy:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x)\ln(x) = \cos(x)\ln(x) + \frac{\sin(x)}{x} \tag{4}$$

Nas interesuje ile wynosi $h'(x)$, więc łącząc równania (3) i (4) mamy:

$$h'(x) = h(x)\bigg(\cos(x)\ln(x) + \frac{\sin(x)}{x}\bigg) \tag{5}$$

wstawiając postać $h(x)$ otrzymujemy:

$$h'(x) = x^{\sin(x)}\bigg(\cos(x)\ln(x) + \frac{\sin(x)}{x}\bigg) \tag{6}$$

Obliczmy teraz pochodną $g(x)$. **Można skorzystać z tożsamości trygonometrycznej:** $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ oraz z **jedynki trygonometrycznej** $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, więc mamy $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$. Przekształcając to równanie: $\underline{\cos^2 x = \frac{1}{2}\Big(\cos(2x) + 1\Big)}$ (jeżeli ktoś zna tę tożsamość może ją od razu wykorzystać, niemniej jednak warto jest pokazać jak ją otrzymujemy). Wstawiamy to rozwinięcie do licznika, co uprości nam wyrażenie:

$$g(x) = \frac{\cos^2(x)}{\cos(2x)} = \frac{1}{2}\frac{\cos(2x) + 1}{\cos(2x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\cancel{\cos(2x)}}{\cancel{\cos(2x)}} + \frac{1}{\cos(2x)}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\cos(2x)}\right) \tag{7}$$

Licząc pochodną powyższej funkcji korzystamy z faktu, że pochodna skalara wynosi zero. **Drugi człon traktujemy jako funkcję złożoną** $p(y) = y^{-1}$**, gdzie** $r(z) = \cos(z)$**, a** $s(x) = 2x$**. Więc** $h(x) = p(r(s(x)))$**, korzystając z reguły łańcuchowej mamy:** $h'(x) = p'(r(s(x))) \cdot r'(s(x)) \cdot s'(x)$. Obliczając każdą pochodną z osobna, mamy:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}p(y) = p'(y) = -y^{-2} \qquad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{podstawiamy}} \qquad p'(r(s(x))) = -\cos^{-2}(2x) = -\frac{1}{\cos^2(2x)} \tag{8}$$

$$r'(z) = -\sin(z) \qquad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{podstawiamy}} \qquad r'(s(x)) = -\sin(2x) \tag{9}$$

$$s'(x) = 2 \tag{10}$$

Mnożąc przez siebie powyższe równania oraz uwzględniając stały czynnik $\frac{1}{2}$**, otrzymujemy:**

$$h'(x) = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{stała}}\Bigg[\underbrace{-\frac{1}{\cos^2(2x)}}_{p'(r(s(x)))} \cdot \underbrace{\Big(-\sin(2x)\Big)}_{r'(s(x))} \cdot \underbrace{2}_{s'(x)}\Bigg] = \frac{\sin(2x)}{\cos^2(2x)} \tag{11}$$

Wystarczy teraz dodać do siebie pochodne: $g'(x) + h'(x)$ aby otrzymać pochodną całej naszej funkcji: $f'(x)$

$$f'(x) = x^{\sin(x)}\left(\cos(x)\ln(x) + \frac{\sin(x)}{x}\right) + \frac{\sin(2x)}{\cos^2(2x)} \tag{12}$$

To jest ostateczny wynik!!! (jak ktoś chce może go przedstawić w trochę innej formie, np. przy użyciu funkcji tangens).

Przykład 2 Drugi przykład rozwiązania co do pierwszej części przebiega identycznie. Natomiast pochodna funkcji $h(x)$ obliczana jest w inny sposób. Nie będę tutaj przedstawiał wszystkich rachunków (ponieważ są znacznie żmudniejsze niż w przykładzie 1). Ograniczę się do opisu co należy zrobić (te podpunkty są ważne w opisie rozwiązań!!!)

- Traktujemy $h(x)$ jako iloraz funkcji: $h(x) = \frac{p(x)}{r(x)}$ (nie mylić funkcji $p(x)$ i $r(x)$ z funkcjami wprowadzonymi w poprzednim przykładzie.
- Liczymy pochodną podług wzoru na pochodną ilorazu, tzn.:

$$h'(x) = \frac{p'(x) \cdot r(x) - r'(x)p(x)}{r(x)^2} \tag{13}$$

- Korzystamy z tożsamości trygonometrycznych, w celu uproszczenia wyrażenia. Tożsamości to: $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ oraz z tej samej co w przykładzie 1.
- Uproszczone w ten sposób wyrażenie dodajemy do pochodnej funkcji $g(x)$ i otrzymujemy wynik końcowy!!!.

Jest to tylko schemat rozwiązania. Wniosek jaki z tej analizy jest wyprowadzony to: starać się jak najprzejrzyściej prezentować swój tok rozumowania, nie trzeba pisać wielkich opracowań do pojedynczego rachunku, który jest oczywisty, lecz gdy chcemy skorzystać z jakiejś specjalnej, „nietuzinkowej” właściwości, warto opisać proces jej użycia. Często taki opis może skrócić rachunki (np. zauważenie pewnej symetrii, która od razu ułatwia nam zadanie).