1 Równania różniczkowe drugiego rzędu

Najpierw zajmiemy się równaniami różniczkowymi rzędu drugiego, w których y nie występuje w sposób jawny, tzn.

$$F(x,\ y',\ y'') = 0 \tag{1.1}$$

Równanie takie rozwiązujemy poprzez podstawienie

$$y' = p(x) \tag{1.2}$$

więc

$$y'' = p' \tag{1.3}$$

stąd otrzymujemy równanie różniczkowe rzędu pierwszego

$$F(x,\ p,\ p') = 0 \tag{1.4}$$

Zadanie 1. Rozwiązać równanie różniczkowe drugie rzędu

$$y'' = 1 - y'^2 \tag{1.5}$$

Robimy podstawienie $y' = p$, co nam daje $y'' = p'$, więc równanie przybiera formę

$$p' = 1 - p^2 \tag{1.6}$$

rozdzielając zmienne i całkując

$$\int \frac{\mathrm{d}p}{1-p^2} = \int \mathrm{d}x \tag{1.7}$$

całkę po lewej stronie rozwiązujemy poprzez ułamki proste

$$\frac{1}{1-p^2} = \frac{A}{1-p} + \frac{B}{1+p} \tag{1.8}$$

czyli

$$A - B = 0 \tag{1.9}$$
$$A + B = 1 \tag{1.10}$$

więc $A = B = 1/2$, czyli całka

$$\int \frac{\mathrm{d}p}{1-p^2} = \frac{1}{2}(\int \frac{\mathrm{d}p}{1-p} + \int \frac{\mathrm{d}p}{1+p}) = \frac{1}{2}\ln|\frac{1-p}{1+p}| + C \tag{1.11}$$

więc

$$\frac{1}{2}\ln|\frac{1-p}{1+p}| = x + \tilde{C}_1 \tag{1.12}$$

czyli wyliczając p mamy

$$\frac{1-p}{1+p} = C_1e^{2x} \Rightarrow 1-p = C_1e^{2x} + pC_1e^{2x} \Rightarrow p = \frac{1-C_1e^{2x}}{1+C_1e^{2x}} \tag{1.13}$$

wiedząc, że

$$p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1-C_1e^{2x}}{1+C_1e^{2x}} \tag{1.14}$$

rozdzielamy zmienne i otrzymujemy dwie całki

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+C_1e^{2x}} - \int \frac{C_1e^{2x}\mathrm{d}x}{1+C_1e^{2x}} \tag{1.15}$$

druga z nich rozwiązywana jest przez podstawienie $1 + C_1e^{2x} = t$, więc $C_1e^{2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}t$

$$\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{2}\ln|1 + C_1e^{2x}| + \tilde{C}_2 \tag{1.16}$$

natomiast pierwszą musimy trochę przekształcić

$$\frac{1}{1+C_1e^{2x}} = \frac{1}{e^{2x}(e^{-2x} - C_1)} = \frac{e^{-2x}}{(e^{-2x} - C_1} \tag{1.17}$$

teraz wykonujemy podstawienie $t = e^{-2x} - C_1$ co nas sprowadza do całki postaci

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+C_1e^{2x}} = -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\frac{1}{2}\ln|e^{-2x} + C_1| + C_3 \tag{1.18}$$

czyli naszym rezultatem jest

$$y = -\frac{1}{2}\ln|e^{-2x} + C_1| - \frac{1}{2}\ln|1 + C_1e^{2x}| + \tilde{C} \tag{1.19}$$

Zadanie 2. Rozwiąż równanie różniczkowe

$$y'' = \frac{1}{1+x^2} \tag{1.20}$$

$$y'' = y' + e^x \tag{1.21}$$

$$y'' = x + \sin x \tag{1.22}$$

$$xy'' + y' = x^2 + 1 \tag{1.23}$$

Pierwsze zadanie nie posiada w jawny sposób y i y', ale tak czy inaczej zamieniamy to równanie z drugiego rzędu na równanie pierwszego rzędu. $y' = p$, więc $y'' = p'$, stąd

$$p' = \frac{1}{1+x^2} \tag{1.24}$$

rozdzielając zmienne otrzymujemy równanie całkowe

$$\int p \mathrm{d}p = \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \tag{1.25}$$

czyli $p = \arctan x + C_1$, pamiętając, że $p = y'$, to

$$\int y \mathrm{d}y = \int \arctan x \mathrm{d}x + C_1 \int \mathrm{d}x \tag{1.26}$$

całkę z $\arctan x$ liczyliśmy przez części, co nam dawało

$$\int \arctan x \mathrm{d}x = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C_2 \tag{1.27}$$

czyli rozwiązaniem jest

$$y = x(\arctan x + C_1) - \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C_2 \tag{1.28}$$

Zadanie (1.21)

$$y'' = y' + e^x \tag{1.29}$$

po podstawieniu $p = y'$ przechodzi w

$$p' = p + e^x \tag{1.30}$$

jest to równanie niejednorodne. Najpierw rozwiązujemy zagadnienie jednorodne postaci

$$p' - p = 0 \Rightarrow p' = p \tag{1.31}$$

Równanie to sprowadza się do całki postaci

$$\int \frac{\mathrm{d}p}{p} = \int \mathrm{d}x \Rightarrow \ln |p| = x + C \Rightarrow p = \tilde{C}_1 e^x \tag{1.32}$$

teraz uzmienniamy stałą, czyli

$$p = u(x) e^x \tag{1.33}$$

i wstawiamy do równania (1.30), czyli

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} e^x = e^x \tag{1.34}$$

skracając przez e^x mamy równanie całkowe

$$\int \mathrm{d}u = \int \mathrm{d}x \Rightarrow u = x + C_1 \tag{1.35}$$

czyli

$$p = x e^x + C_1 e^x \tag{1.36}$$

wiedząc, że $p = y'$ to

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xe^x + C_1e^x \Rightarrow \int \mathrm{d}y = \int xe^x \mathrm{d}x + C_1 \int e^x \mathrm{d}x \tag{1.37}$$

pierwszą całkę po lewej stronie rozwiązujemy przez części (kilkukrotnie mieliśmy z nią kontakt, więc nie będziemy w tym miejscu jej po raz kolejny rozwiązywać)

$$y = xe^x - e^x + C_1e^x + C_2 \tag{1.38}$$

Zadanie

$$y'' = x + \sin x \tag{1.39}$$

tutaj również nie posiadamy w jawny sposób y' i y, nie mniej jednak $y'' = p'$, czyli

$$p' = x + \sin x \Rightarrow \int \mathrm{d}p = \int x\mathrm{d}x + \int \sin x\mathrm{d}x \Rightarrow p = \frac{1}{2}x^2 - \cos x + C_1 \tag{1.40}$$

czyli

$$p = y' = \frac{1}{2}x^2 - \cos x + C_1 \Rightarrow \int \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int x^2\mathrm{d}x - \int \cos x\mathrm{d}x + C_1 \int \mathrm{d}x \tag{1.41}$$

więc rozwiązaniem równania jest

$$y = \frac{1}{6}x^3 - \sin x + C_1x + C_2 \tag{1.42}$$

Kolejny przykład

$$xy'' + y' = x^2 + 1 \tag{1.43}$$

przekształca się do równania

$$xp' + p = x^2 + 1 \tag{1.44}$$

jest to znowu równanie niejednorodne, czyli najpierw radzimy sobie z zagadnieniem jednorodnym

$$xp' + p = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = -\frac{p}{x} \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}p}{p} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x} \Rightarrow \ln|p| = -\ln|x| + \tilde{C} \tag{1.45}$$

uzmieniając stałą

$$p = u(x)\frac{1}{x} \tag{1.46}$$

i wstawiając do równania niejednorodnego otrzymujemy

$$u' = x^2 + 1 \Rightarrow \int \mathrm{d}u = \int x^2\mathrm{d}x + \int \mathrm{d}x \Rightarrow u = \frac{1}{3}x^3 + x + C_1 \tag{1.47}$$

czyli

$$p = \frac{1}{3}x^2 + 1 + \frac{C_1}{x} \tag{1.48}$$

stąd wyliczamy y

$$\int \mathrm{d}y = \int p\mathrm{d}x = \frac{1}{9}x^3 + x + C_1 \ln|x| + C_2 \tag{1.49}$$

2 Równania różniczkowe o współczynnikach stałych

Równanie różniczkowe o współczynnikach stałych ma postać

$$a\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + cy = f(x) \tag{2.1}$$

2.1 Równania jednorodne

gdy $f(x) = 0$, czyli

$$a\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + cy = 0 \tag{2.2}$$

zakładamy rozwiązanie postaci $y = e^{rx}$, więc

$$y = e^{rx} \tag{2.3}$$
$$y' = re^{rx} \tag{2.4}$$
$$y'' = r^2e^{rx} \tag{2.5}$$

wstawiając do równania ogólnego mamy

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0 \tag{2.6}$$

dzieląc przez e^{rx} dochodzimy do równania charakterystycznego postaci

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{2.7}$$

Liczymy teraz deltę i gdy $\Delta > 0$, czyli równanie ma dwa pierwiastki, to rozwiązaniem naszego równania różniczkowego jest funkcja

$$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} \tag{2.8}$$

gdzie r_1 i r_2 to pierwiastki równania (2.7).
Gdy $\Delta = 0$, czyli $r_1 = r_2$ to równanie ma rozwiązanie postaci

$$(C_1x + C_2)e^{r_1x} \tag{2.9}$$

Jeśli natomiast $\Delta < 0$, czyli pierwiastki są zespolone

$$r_1 = \alpha - i\beta \tag{2.10}$$
$$r_2 = \alpha + i\beta \tag{2.11}$$

gdzie

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad , \quad \beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \tag{2.12}$$

to rozwiązanie jest postaci

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x) \tag{2.13}$$

Zadanie 3. Rozwiąż równanie różniczkowe

$$y'' - 2y' = 0 \tag{2.14}$$

Czyli równanie to sprowadza się do rozważenia równania charakterystycznego postaci

$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 2 \tag{2.15}$$

ponieważ są dwa pierwiastki, więc rozwiązanie będzie postaci

$$y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{2x} = C_1 + C_2 e^{2x} \tag{2.16}$$

sprawdźmy, czy nasze rozwiązanie spełnia wyjściowe równanie różniczkowe

$$y'' = C_2 (2)^2 e^{2x} \quad , \quad y' = 2C_2 e^{2x} \tag{2.17}$$

więc

$$4C_2 e^{2x} - 2 \cdot 2C_2 e^{2x} = 0 \tag{2.18}$$

Zadanie 4. Rozwiąż równania różniczkowe

$$\begin{aligned} y'' + y' + \frac{1}{4}y &= 0 & (2.19)\\ y'' - y' - 2y &= 0 & (2.20)\\ y'' - 2y' + y &= 0 & (2.21)\\ y'' + 2y' + 5y &= 0 & (2.22)\\ && (2.23) \end{aligned}$$

Pierwsze zadanie sprowadza się do rozważenie równania charakterystycznego postaci

$$x^2 + x + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow (x + \frac{1}{2})^2 = 0 \tag{2.24}$$

czyli są dwa pierwiastki równe sobie $x = -\frac{1}{2}$, więc rozwiązanie jest postaci

$$(C_1 x + C_2) e^{-\frac{1}{2}x} \tag{2.25}$$

Przykład

$$y'' - y' - 2y = 0 \tag{2.26}$$

ma równanie charakterystyczne dane

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 8 = 9 \tag{2.27}$$

czyli są dwa pierwiastki

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases} \tag{2.28}$$

więc rozwiązanie jest postaci

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} \tag{2.29}$$

Zadanie

$$y'' - 2y' + y = 0 \Rightarrow (x-2)^2 \Rightarrow x_1 = 2 \tag{2.30}$$

jeden pierwiastek, więc rozwiązanie postaci

$$(C_1 x + C_2) e^{2x} \tag{2.31}$$

Następny przykład to

$$y'' + 2y' + 5y = 0 \tag{2.32}$$

czyli równanie charakterystyczne postaci

$$x^2 + 2x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 20 = -16 \tag{2.33}$$

czyli pierwiastki są zespolone. Współczynnik $\alpha = \frac{-b}{2a} = -1$, natomiast $\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} = 2$, czyli rozwiązanie jest postaci

$$e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) \tag{2.34}$$

2.2 Równania niejedonorodne

Tym razem $f(x) \neq 0$, czyli

$$a\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + cy = f(x) \tag{2.35}$$

Rozwiązaniem tego typu równania jest funkcja postaci

$$y = y_1(x;\ C_1,\ C_2) + y_2(x) \tag{2.36}$$

gdzie y_1 jest rozwiązaniem równania jednorodnego, a y_2 jakimś szczególnym rozwiązaniem powyższego równania. Najczęściej znajdujemy y_2 metodą przewidywania, lub poprzez uzmiennienie stałej.

Zadanie 5. Rozwiązać równanie różniczkowe

$$y'' - 7y' + 12y = x \tag{2.37}$$

Najpierw rozwiązujemy równanie jednorodne postaci

$$y'' - 7y' + 12y = 0 \Rightarrow \Delta = 49 - 48 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{7 \pm 1}{2} = \begin{cases} 4 \\ 3 \end{cases} \tag{2.38}$$

Czyli rozwiązanie równania jednorodnego jest postaci

$$y_1 = C_1 e^{4x} + C_2 e^{3x} \tag{2.39}$$

teraz przewidujemy rozwiązanie szczególne jako wielomian stopnia pierwszego, ponieważ funkcja $f(x)$ jest wielomianem stopnia pierwszego, czyli $y_2 = ax+b$, stąd $y' = a$, $y'' = 0$, wstawiając te wielkości do równania (2.37) znajdujemy współczynniki a i b, czyli

$$-7a + 12ax + 12b = x \tag{2.40}$$

więc $12a = 1$ czyli $a = \frac{1}{12}$, natomiast drugie równanie to

$$-\frac{7}{12} + 12b = 0 \Rightarrow b = \frac{7}{144} \tag{2.41}$$

czyli ostatecznie mamy rozwiązanie postaci

$$y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{3x} + \frac{x}{12} + \frac{7}{144} \tag{2.42}$$

Zadanie 6. Rozwiąż równanie

$$y'' - y = 2\sin x \tag{2.43}$$

Równanie jednorodne jest postaci

$$y'' - y = 0 \tag{2.44}$$

więc równanie charakterystyczne

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 1 \lor x = -1 \tag{2.45}$$

to rozwiązanie jest postaci

$$y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} \tag{2.46}$$

Równanie niejednorodne staramy się przewidzieć w postaci kombinacji funkcji trygonometrycznych

$$y_2 = a\sin x + b\cos x \tag{2.47}$$

stąd

$$y_2' = a\cos x - b\sin x \tag{2.48}$$

$$y_2'' = -a\sin x - b\cos x \tag{2.49}$$

podstawiając do naszego równania niejednorodnego otrzymamy

$$-2a\sin x = 2\sin x \Rightarrow a = -1 \tag{2.50}$$

czyli rozwiązaniem równania jest funkcja postaci

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x - \sin x \tag{2.51}$$

Rozwiążmy to samo zadanie poprzez uzmiennienie stałej, dla przejrzystości nazwijmy $C_1 = A$ i $C_2 = B$. Musi być spełniony warunek

$$A'\bar{y} + B'\bar{\bar{y}} = 0 \tag{2.52}$$

$$A'\bar{y}' + B'\bar{\bar{y}}' = \frac{fx}{a} \tag{2.53}$$

w naszym przypadku $\bar{y} = e^{-x}$ oraz $\bar{\bar{y}} = e^x$ czyli równania te przybierają postać

$$A'e^{-x} + B'e^x = 0 \tag{2.54}$$

$$A'(-e^{-x}) + B'e^x = 2\sin x \tag{2.55}$$

dodając stronami mamy

$$2B'e^x = 2\sin x \tag{2.56}$$

czyli

$$B = \int \sin x e^{-x} \mathrm{d}x \tag{2.57}$$

Całkę powyższą rozwiązujemy przez części (dwukrotnie) i otrzymamy

$$B = -\frac{1}{2} e^{-x}(\sin x + \cos x) + C_2 \tag{2.58}$$

ponieważ $B' = \sin x e^{-x}$ to wstawiając to do pierwszego równania będziemy mogli wyliczyć A

$$A'e^{-x} + \sin x = 0 \Rightarrow A' = -\sin x e^{-x} \tag{2.59}$$

w analogiczny sposób rozwiązujemy to równanie (przez części) i otrzymujmy

$$A = -\frac{1}{2} e^{x}(\sin x - \cos x) + C_1 \tag{2.60}$$

wstawiając do wyjściowego równania

$$y = A(x)e^{-x} + B(x)e^x = C_1 e^{-x} + C_2 e^x - \sin x \tag{2.61}$$

co jest zgodne z naszym wynikiem uzyskanym inna metodą.

Zadanie 7. Rozwiąż równania

$$y'' + y' - 2y = 4x \tag{2.62}$$

$$y'' - 3y' + 2y = x^2 \tag{2.63}$$

$$y'' + y' = e^x \tag{2.64}$$

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x} \tag{2.65}$$

We wszystkich przypadkach najpierw rozpoczynamy od równania jednorodnego, które dla pierwszego przypadku jest postaci

$$y'' + y' - 2y = 0 \tag{2.66}$$

czyli równanie charakterystyczne

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 8 = 9 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases} \tag{2.67}$$

więc rozwiązaniem tego zagadnienia jednorodnego jest funkcja

$$y_1 = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x \tag{2.68}$$

Rozwiązanie równania niejednorodnego zakładamy, że jest postaci wielomianu stopnia pierwszego, tzn.

$$y_2 = ax + b \tag{2.69}$$

$$y_2' = a \tag{2.70}$$

$$y_2'' = 0 \tag{2.71}$$

wstawiając to otrzymujemy związek

$$a - 2ax - 2b = 4x \tag{2.72}$$

czyli

$$-2a = 4 \tag{2.73}$$

$$a - 2b = 0 \tag{2.74}$$

stąd $a = -2$ i $b = -1$
więc rozwiązanie ostateczne jest postaci

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x - 2x - 1 \tag{2.75}$$

Przykład

$$y'' - 3y' + 2y = x^2 \tag{2.76}$$

ma równanie charakterystyczne dla problemu jednorodnego w formie

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 8 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases} \tag{2.77}$$

czyli

$$y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^x \tag{2.78}$$

rozwiązanie szczególne postulujemy w postaci wielomianu stopnia drugiego, ponieważ $f(x)$ jest wielomianem stopnia drugiego

$$\begin{aligned} y_2 &= ax^2 + bx + c && (2.79)\\ y_2' &= 2ax + b && (2.80)\\ y_2'' &= 2a && (2.81)\end{aligned}$$

wstawiając

$$2a - 6ax - 3b + 2ax^2 + 2bx + 2c = x^2 \quad (2.82)$$

porównując współczynniki przy tych samych potęgach x otrzymujemy układ równań

$$\begin{aligned} 2a &= 1 && (2.83)\\ 2(a+c) - 3b &= 0 && (2.84)\\ -6a + 2b &= 0 && (2.85)\end{aligned}$$

czyli $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$ oraz $c = \frac{7}{4}$, czyli rozwiązanie to

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4} \quad (2.86)$$

Przykład

$$y'' + y' = e^x \quad (2.87)$$

posiada równanie charakterystyczne

$$x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = -1 \quad (2.88)$$

czyli

$$y_1 = C_1 + C_2 e^{-x} \quad (2.89)$$

Rozwiążmy przez uzmiennianie stałych, czyli

$$y_1 = A(x) + B(x)e^{-x} \quad (2.90)$$

i musimy mieć spełnione warunki

$$\begin{aligned} A' + B'e^{-x} &= 0 && (2.91)\\ -B'e^{-x} &= e^x && (2.92)\end{aligned}$$

z drugiego wyznaczamy B

$$B = -\int e^{2x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}e^{2x} + C_2 \quad (2.93)$$

oraz $B' = -e^{2x}$ więc

$$A' - e^x = 0 \Rightarrow A = e^x + C_1 \quad (2.94)$$

Łącząc wszystkie wyniki mamy

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} e^x \tag{2.95}$$

Ostatni przykład

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x} \tag{2.96}$$

To równanie charakterystyczne jest postaci

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \tag{2.97}$$

więc rozwiązanie jest postaci

$$y_1 = (C_1 x + C_2) e^x \tag{2.98}$$

uzeminniając stałą, mamy warunki

$$A'(x) x e^x + B'(x) e^x = 0 \tag{2.99}$$

$$A'(x)(e^x + x e^x) + B'(x) e^x = \frac{e^x}{x} \tag{2.100}$$

drugie równanie się upraszcza do postaci

$$A'(1+x) + B' = \frac{1}{x} \tag{2.101}$$

pierwsze natomiast do

$$A'x + B' = 0 \tag{2.102}$$

odejmując stronami mamy

$$A' = \frac{1}{x} \tag{2.103}$$

czyli

$$A = \ln|x| + C_1 \tag{2.104}$$

wstawiając ten wynik do drugiego

$$\frac{1}{x} + 1 + B' = \frac{1}{x} \Rightarrow B' = -1 \Rightarrow B = -x + C_2 \tag{2.105}$$

czyli rezultat to

$$y = (\ln|x| x e^x - x e^x) + (C_1 x + C_2) e^x \tag{2.106}$$