1 Równania różniczkowe zwyczajne o rozdzielonych zmiennych

Definicja 1. Równaniem różniczkowym o rozdzielonych zmiennych nazywamy równanie postaci

$$p(y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = q(x) \tag{1.1}$$

rozwiązanie równania sprowadza się do postaci całkowej

$$\int p(y)\mathrm{d}y = \int q(x)\mathrm{d}x \tag{1.2}$$

Zadanie 1. Rozwiąż równanie różniczkowe.

$$2x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y \tag{1.3}$$

Przenosimy wszystkie wyrazy z y na jedną, a z x na drugą stroną, co nas doprowadzi do

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} \tag{1.4}$$

Całkując obustronnie otrzymujemy z lewej strony

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \ln|y| + C \tag{1.5}$$

natomiast z prawej strony

$$\int \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{x} + C_1 \tag{1.6}$$

łącząc oba równania mamy

$$\ln|y| = -\frac{1}{2}\frac{1}{x} + C_2 \Rightarrow y = C_3 e^{-\frac{1}{2x}} \tag{1.7}$$

Sprawdźmy czy otrzymany wynik spełnia nasze wyjściowe równanie różniczkowe

$$2x^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Ce^{-\frac{1}{2x}} = 2x^2\Big(-\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{x^2})Ce^{-\frac{1}{2x}}\Big) = Ce^{-\frac{1}{2x}} = y \tag{1.8}$$

wynik się zgadza!

Zadanie 2. Rozwiąż równanie różniczkowe

$$xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 - x^2 \tag{1.9}$$

Rozdzielamy zmienne, co nam daje równanie

$$y\mathrm{d}y = (\frac{1}{x} - x)\mathrm{d}x \tag{1.10}$$

całkując obie strony otrzymujemy

$$\frac{1}{2}y^2 = \ln|x| - \frac{1}{2}x^2 + C \tag{1.11}$$

czyli funkcja y wynosi

$$y = \pm\sqrt{2\ln|x| - x^2 + C} \tag{1.12}$$

Zadanie 3. Rozwiąż równania różniczkowe

$$x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y - a \quad = \quad 0 \tag{1.13}$$

$$xy \quad = \quad (a+x)(b+y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{1.14}$$

$$x(1+e^y) - e^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \quad = \quad 0 \tag{1.15}$$

We wszystkich tych zadaniach staramy się rozdzielić zmienne. W pierwszym przykładzie otrzymamy równanie postaci

$$\frac{\mathrm{d}y}{a-y} = \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \tag{1.16}$$

całkując dostaniemy

$$\ln|a-y| = -\frac{1}{x} + C \tag{1.17}$$

więc

$$y = C_1 e^{-\frac{1}{x}} + a \tag{1.18}$$

Równanie (1.14) sprowadza się do zagadnienia

$$\frac{x}{a+x}\mathrm{d}x = (\frac{b}{y} + 1)\mathrm{d}y \tag{1.19}$$

Lewa strona to nic innego jak

$$\frac{x}{a+x} = \frac{-a}{a+x} + 1 \tag{1.20}$$

co można otrzymać poprzez wykonanie prostego dzielenia (tak jak w przypadku dzielenia wielomianów). Całkując teraz obie strony otrzymamy

$$\ln|a+x| + x = b\ln|y| + y + C \tag{1.21}$$

Wynik możemy w tej postaci zostawić.
Zadanie (1.15) sprowadzi się do rozważania całek

$$\int \frac{e^y}{1+e^y}\mathrm{d}y = \int x\mathrm{d}x \tag{1.22}$$

lewą stronę rozwiązujemy poprzez podstawienie ($u = 1 + e^y$, lub poprzez zwrócenie uwagi, że licznik jest pochodną mianownika, co od razu doprowadzi nas do rezultatu), więc

$$\ln|1+e^y| = \frac{1}{2}x^2 + C \tag{1.23}$$

2 Równania różniczkowe liniowe rzędu pierwszego

Równanie różniczkowe postaci

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x) \tag{2.1}$$

liniowe względem y' i y, nazywamy równaniem różniczkowym liniowym rzędu pierwszego.

2.1 Równania różcznikowe liniowe jednorodne

Jeżeli w równaniu (2.1) $q(x) = 0$, to takie równanie nazywamy równaniem jednorodnym. Równanie takie jest spełnione dla $y = 0$. Zakładamy, że $y \neq 0$ i staramy się rozdzielić zmienne.

Zadanie 4. Rozwiązać równanie

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{2x-1}{x^2}y = 0 \tag{2.2}$$

Przenosimy drugi człon na drugą stronę i dzielimy wszystko przez y

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \Big(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\Big)\mathrm{d}x \tag{2.3}$$

całkując otrzymujemy

$$\ln|y| = 2\ln|x| + \frac{1}{x} + C \tag{2.4}$$

Co da się zapisać jako

$$y = C_1 x^2 e^{\frac{1}{x}} \tag{2.5}$$

Zadanie 5. Rozwiąż równanie jednorodne

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y\tan x \tag{2.6}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{x^2}y \tag{2.7}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x^2-4} \tag{2.8}$$

Pierwsze zadanie sprawodza się do postaci całkowej

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \tan x \mathrm{d}x \tag{2.9}$$

lewa strona to $\ln|y|$, natomiast z prawą stroną mieliśmy już kilka razy kontakt i wiemy, że jest to $-\ln|\cos x|$ (można to policzyć dokonując podstawienie $t = \cos x$), czyli

$$\ln|y| = -\ln|\cos x| + C \Rightarrow y = C_1 \cos x \tag{2.10}$$

Przykład (2.7): również w prosty sposób można rozdzielić zmienne

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \tag{2.11}$$

czyli

$$\ln|y| = \frac{1}{x} + C \Rightarrow y = C_1 e^{\frac{1}{x}} \tag{2.12}$$

Ostatnie z zadań (2.8) rozwiązujemy w analogiczny sposób:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 4} \tag{2.13}$$

Prawa strona w tym przykładzie musi zostać rozłożona na ułamki proste, czyli

$$\frac{1}{x_4^2} = \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} \tag{2.14}$$

stąd wyliczamy współczynniki A i B, które poprzez przemnożenie obu stron przez $x^2 - 4$ dadzą nam równania

$$A(x+2) + B(x-2) = 1 \tag{2.15}$$

czyli

$$A + B = 0 \tag{2.16}$$

$$2(A - B) = 1 \tag{2.17}$$

więc $A = \frac{1}{4}$, natomiast $B = -\frac{1}{4}$. Więc całka

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 4} = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-2} - \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+2} = \frac{1}{4}\ln|x-2| - \frac{1}{4}\ln|x+2| + C = \frac{1}{4}\ln|\frac{x-2}{x+2}| + C \tag{2.18}$$

czyli rozwiązaniem naszego równania jest

$$\ln|y| = \frac{1}{4}\ln|\frac{x-2}{x+2}| + C \Rightarrow y = C_1|\frac{x-2}{x+2}|^{\frac{1}{4}} \tag{2.19}$$

2.2 Równania różniczkowe liniowe niejednorodne

Równanie różniczkowe liniowe niejednorodne jest postaci

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x) \tag{2.20}$$

rozwiązujemy je metodą uzmienniania stałej. W tym celu rozwiązujemy najpierw równanie jednorodne (zakładamy, że $q(x) = 0$. Następnie zastępujemy stałą całkowania C poprzez funkcję $u(x)$, następnie wstawiamy taką funkcję do wyjściowego równania i staramy się odczytać postać funkcji $u(x)$.

Zadanie 6. Oblicz niejednorodne równanie różniczkowe

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 3y = 2 \tag{2.21}$$

Najpierw rozwiązujemy równanie jednorodne postaci

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3y \tag{2.22}$$

czyli

$$\ln|y| = 3x + C \tag{2.23}$$

więc

$$y = C_1 e^{3x} \tag{2.24}$$

Teraz uzmienniamy stałą, czyli

$$C_1 \to u(x) \tag{2.25}$$

dlatego $y = u(x)e^{3x}$ i wstawiamy do wyjściowego równania tak zdefiniowaną funkcję

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}e^{3x} + 3u(x)e^{3x} - 3(u(x)e^{3x}) = 2 \tag{2.26}$$

dwa ostatnie wyrazy po lewej stronie się znoszą i zostajemy z równaniem postaci

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}e^{3x} \tag{2.27}$$

które można sprowadzić do problemu

$$\int \mathrm{d}u = 2\int e^{-3x}\mathrm{d}x \tag{2.28}$$

czyli

$$u = -\frac{2}{3}e^{-3x} + C_2 \tag{2.29}$$

wstawiając teraz to wyrażenie do

$$y = u(x)e^{3x} = -\frac{2}{3} + C_2 e^{3x} \tag{2.30}$$

Zadanie 7. Rozwiąż równania różniczkowe

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2xy = x - x^3 \tag{2.31}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2xy = xe^{-x^2} \tag{2.32}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x \tag{2.33}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y\tan x = \sin 2x \tag{2.34}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{y}{x} = 2 \tag{2.35}$$

Pierwsze zadanie (2.31). Najpierw rozważmy równanie jednorodne postaci

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2xy = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xy \tag{2.36}$$

czyli mamy całki

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = 2\int x\mathrm{d}x \Rightarrow \ln|y| = x^2 + C \Rightarrow y = C_1 e^{x^2} \tag{2.37}$$

uzmienniając stałą funkcja y wyraża się

$$y = u(x)e^{x^2} \tag{2.38}$$

wstawiając tak zdefiniowaną funkcję do równania (2.31) otrzymujemy

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}e^{x^2} + u(x)2x^2e^{x^2} - 2xu(x)e^{x^2} = x - x^3 \tag{2.39}$$

dwa ostatnie wyrazy po lewej stronie się zniosą i pozostajemy z wyrażeniem typu

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}e^{x^2} = x - x^3 \tag{2.40}$$

czyli z całkami

$$\int \mathrm{d}u = \int xe^{-x^2}\mathrm{d}x - \int x^3e^{-x^2}\mathrm{d}x \tag{2.41}$$

pierwszą z całek po prawej stronie łatwo obliczyć poprzez podstawienie $-x^2 = t$, czyli $x\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\mathrm{d}t$, więc

$$\int xe^{-x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int e^t\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C \tag{2.42}$$

w drugiej całce dokonujemy takiego samego podstawienia, z tą różnicą, że teraz nas to doprowadzi do całki tupu

$$\int x^3e^{-x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int te^t\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}e^{-x^2} - \frac{1}{2}e^{-x^2} + C \tag{2.43}$$

gdzie w ostatnim kroku całka została rozwiązana poprzez części. Łącząc oba wyniki dostajemy, że $u(x)$ wynosi

$$u(x) = \frac{x^2}{2}e^{-x^2} + \frac{1}{2}e^{-x^2} - \frac{1}{2}e^{-x^2} + C = \frac{x^2}{2}e^{-x^2} + C \tag{2.44}$$

Na koniec wstawiamy postać naszego $u(x)$ do wyrażenia na y i otrzymujemy

$$y = \frac{x^2}{2} + Ce^{x^2} \tag{2.45}$$

Zadanie (2.32) musimy rozważyć najpierw równanie jednorodne postaci

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2xy \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -2\int x\mathrm{d}x \Rightarrow \ln|y| = -x^2 + C \Rightarrow y = C_1 e^{-x^2} \tag{2.46}$$

uzmienniając stałą

$$y = u(x)e^{-x^2} \tag{2.47}$$

wstawiamy teraz to wyrażenie do (2.32) i otrzymujemy

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}e^{-x^2} = xe^{-x^2} \tag{2.48}$$

gdzie już zostały pominięte wyrazy końcowe, które się znoszą. Teraz możemy uprościć to równanie poprzez podzielenie przez czynnik e^{-x^2}, da nam to

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = x \tag{2.49}$$

co prowadzi do funkcji u postaci

$$u(x) = \frac{1}{2}x^2 + C \tag{2.50}$$

więc rozwiązaniem równania jest funkcja postaci

$$y = \frac{x^2}{2}e^{-x^2} + Ce^{-x^2} \tag{2.51}$$

Równanie jednorodne, które będziemy rozważać w zadaniu (2.33) jest postaci

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y\cos x \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \cos x\mathrm{d}x \Rightarrow \ln|y| = -\sin x + C \tag{2.52}$$

więc po uzmiennieniu stałej mamy

$$y = u(x)e^{-\sin x} \tag{2.53}$$

wstawiając do równania (2.33) i już pomijając wyrazy, które się zniosą otrzymujemy

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}e^{-\sin x} = \frac{1}{2}\sin 2x \Rightarrow \int \mathrm{d}u = \int \sin x \cos x e^{\sin x}\mathrm{d}x \tag{2.54}$$

zróbmy podstawienie $t = \sin x$, więc $\mathrm{d}t = \cos x \mathrm{d}x$, czyli całka

$$\int \sin x \cos x e^{\sin x} \mathrm{d}x = \int t e^t \mathrm{d}t = t e^t - e^t + C = \sin x e^{\sin x} - e^{\sin x} + C \tag{2.55}$$

wstawiając do wyrażenia na y otrzymujemy

$$y = \sin x - 1 + C e^{-\sin x} \tag{2.56}$$

Zadanie (2.34) posiada równianie jednorodne postaci

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y \tan x \tag{2.57}$$

analogiczne równanie już rozważaliśmy, więc można skorzystać z rozwiązania, które da nam rezultat

$$y = C \cos x \Rightarrow y = u(x) \cos x \tag{2.58}$$

wstawiając i korzystając z wzoru na sinus podwojonego kąta mamy

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \cos x = 2 \sin x \cos x \tag{2.59}$$

więc

$$u = 2 \int \sin x \mathrm{d}x = -2 \cos x + C \tag{2.60}$$

więc nasze rozwiązanie

$$y = -2 \cos^2 x + C \cos x \tag{2.61}$$

Ostatni przykład posiada równanie jednorodne postaci

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \ln |y| = -\ln |x| + C \Rightarrow y = \frac{C_1}{x} \tag{2.62}$$

uzmienniając stałą

$$y = \frac{u(x)}{x} \tag{2.63}$$

wstawiając otrzymujemy

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \frac{1}{x} = 2 \tag{2.64}$$

czyli

$$u = x^2 + C \tag{2.65}$$

wstawiając otrzymujemy

$$y = x + \frac{C}{x} \tag{2.66}$$