1 Pochadna funkcji

Pochdona funkcji zdefiniowana jest jako granica

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1.1}$$

Geometrycznie pochodna funkcji w punkcie równa się współczynnikowi kątowemu stycznej do wykresu funkcji w tym punkcie.

Twierdzenia, które są przydatne w rachunku różniczkowym:

Twierdzenie 1. Jeżeli funkcja jest różniczkowalna w danym punkcie, to jest też ciągła w tym punkcie.

Twierdzenie 2. Pochodna funkcji stałej równa się zero, tzn. $f(x) = c$, to $f'(x) = 0$

Twierdzenie 3. Pochodna iloczynu stałej przez funkcję równa się iloczynowi stałej przez pochodną funkcji, tzn. $y = cf(x)$ to

$$y' = c \cdot f'(x) \tag{1.2}$$

Niech $u = f(x)$ i $v = g(x)$ oznaczają funkcje różniczkowalne, wówczas zachodzą podane wzory:

Twierdzenie 4. Pochodna sumy funkcji. Jeżeli $y = u + v$ to

$$y' = u' + v' \tag{1.3}$$

Twierdzenie 5. Pochodna iloczynu funkcji. jeżeli $y = uv$ to

$$y' = u'v + uv' \tag{1.4}$$

Twierdzenie 6. Pochodna ilorazu. Jeżeli $y = u/v$ i $v \neq 0$ to

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \tag{1.5}$$

Twierdzenie 7. Pochodna funkcji złożonej. Jeżeli $y = f\Big(g(x)\Big)$ to

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g} \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} \tag{1.6}$$

Przykład:
Niech $y = \sin 2x$, jest to złożenie funkcji sinus i funkcji $2x$. Więc niech $f(g(x)) = \sin g(x)$, natomiast $g(x) = 2x$. Stąd

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g} = \cos g(x) \tag{1.7}$$

oraz $g'(x) = 2$, dlatego łącząc te wyrażenia mamy

$$y' = \cos g(x) \cdot 2 = 2\cos 2x \tag{1.8}$$

Twierdzenie 8. Pochodna funkcji odwrotnej. Niech $y = f(x)$ i ma funkcję odwrotną $x = \phi(y)$, to pochodna funkcji odwrotnej równa się odwrotności pochodnej danej funkcji.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = 1 : \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \quad \text{jeżeli} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \neq 0 \tag{1.9}$$

Następnie należy przedstawić $x = \phi(y)$.
Przykład:
$y = \tan x$, to pochodna y' wynosi

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\cos^2 x} \tag{1.10}$$

Chcemy teraz obliczyć pochodną funkcji odwrotnej, czyli $x = \arctan y$. Więc korzystając z powyższej metody mamy

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} = \cos^2 x \tag{1.11}$$

Prawą stronę przekształcamy w myśl znanej tożsamości $\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$, i podstawiając $y = \tan x$, otrzymujemy

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{1+y^2}, \quad \text{czyli} \quad (\arctan y)' = \frac{1}{1+y^2} \tag{1.12}$$

Ważniejsze wzory rachunku różniczkowego

$$(x^a)' = ax^{a-1}, \quad \text{dla} \quad x > 0,\ a - \text{dowolne} \tag{1.13}$$

$$(\sin x)' = \cos x \tag{1.14}$$

$$(\cos x)' = -\sin x \tag{1.15}$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x, \quad \text{dla} \quad \cos x \neq 0 \tag{1.16}$$

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x), \quad \text{dla} \quad \sin x \neq 0 \tag{1.17}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1, \quad -\frac{1}{2}\pi \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{1}{2}\pi \tag{1.18}$$

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1, \quad 0\pi \leqslant \arccos x \leqslant \pi \tag{1.19}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad -\frac{1}{2}\pi \leqslant \arctan x \leqslant \frac{1}{2}\pi \tag{1.20}$$

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{arc\,ctg} x)' &= \frac{-1}{1+x^2}, \quad 0\pi \leqslant \arctan x \leqslant \pi && (1.21)\\
(e^x)' &= e^x && (1.22)\\
(a^x)' &= a^x \ln a, \quad \text{dla} \quad a>0 && (1.23)\\
(\ln|x|)' &= \frac{1}{x}, \quad \text{dla} \quad x \neq 0 && (1.24)\\
(\log_a|x|)' &= \frac{1}{x\ln a} = \frac{1}{x}\log_a e, \quad \text{dla,} \quad a>0,\ a\neq 1,\ x\neq 0 && (1.25)
\end{aligned}
$$

Zadanie 1. Oblicz z definicji pochodną.

$$
\begin{aligned}
a(x) &= x+1 && (1.26)\\
b(x) &= x^2 && (1.27)\\
c(x) &= \ln x && (1.28)\\
d(x) &= e^x && (1.29)\\
f(x) &= \frac{1}{x} && (1.30)
\end{aligned}
$$

Wstawiamy dane funkcje do definicji pochodnej (ta część z granicą!). W pierwszym otrzymujemy

$$
a'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h+1)-(x+1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1 \tag{1.31}
$$

drugi

$$
b'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^2}+2xh+h^2-\cancel{x^2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2xh+\overbrace{h^2}^{\to 0}}{h} = 2x \tag{1.32}
$$

trzeci

$$
\begin{aligned}
c'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right) = \lim_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} =\\
&= \lim_{h\to 0}\ln\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right]^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\underbrace{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}}_{\to e} = \frac{1}{x}\ln e = \frac{1}{x} && (1.33)
\end{aligned}
$$

czwarte

$$
d'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^x e^h - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x\frac{e^h-1}{h} = e^x\ln e = e^x \tag{1.34}
$$

Ostatnie

$$
f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\cancel{x}-\cancel{x}-h}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h}{x^2h+xh^2} = -\frac{1}{x}^{2} = -x^{-2} \tag{1.35}
$$

Zadanie 2. Oblicz pochodną

$$f(x) = a\sin(ax) \tag{1.36}$$
$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} \tag{1.37}$$
$$f(x) = xe^x \tag{1.38}$$
$$f(x) = \sqrt{x^2-4} \tag{1.39}$$
$$f(x) = e^{\cos^2 x} \tag{1.40}$$
$$f(x) = \ln(\sin x) \tag{1.41}$$

Korzystając z twierdzeń pomocniczych i wzorów na pochodne otrzymujemy:
Pierwsza

$$f'(x) = a\cos(ax) \cdot a = a^2\cos(ax) \tag{1.42}$$

traktujemy całą funkcję jako funkcję złożoną.
Następny przykład

$$f'(x) = \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} \tag{1.43}$$

liczymy ze wzrou na pochodną ilorazu.
Trzeci przykład, traktujemy jako pochodną iloczynu:

$$f'(x) = e^x + e^x x = e^x(1+x) \tag{1.44}$$

Czwarty przykład znowu traktujemy jako funkcję złożoną, przedstawimy pierwiastek jako potęgę $\frac{1}{2}$, w celu ułatwienia rachunków

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2-4)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} \tag{1.45}$$

Następna funkcja to również funkcja złożona.

$$f'(x) = e^{\cos^2 x} \cdot (\cos^2 x)' = e^{\cos^2 x} \cdot (-2\cos x \sin x) = -e^{\cos^2 x}\sin 2x \tag{1.46}$$

ostatni przykład analogicznie.

$$f'(x) = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \cot x \tag{1.47}$$