1 Pochodne cząstkowo

Pochodną cząstkową funkcji dwóch zmiennych $z = f(x,y)$ względem zmiennej x oznaczamy

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv f'_x(x,y) \tag{1.1}$$

i definiujemy jako granicę

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} \tag{1.2}$$

natomiast pochodną cząstkową względem zmiennej y definiujemy

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} \tag{1.3}$$

i oznaczamy

$$\frac{\partial f}{\partial y} \equiv f'_y(x,y) \tag{1.4}$$

Analogicznie definiujemy pochodne cząstkowe funkcji wielu zmiennych.
W praktyce obliczenie pochodnych cząstkowych sprowadza się do obliczenie pochodnej względem jakiejś zmiennej i potraktowania innych zmiennych jako stałe.

Zadanie 1. Oblicz pochodne cząstkowe funkcji

$$f(x,y,z) = xyz \tag{1.5}$$

Licząc pochodną cząstkową względem zmiennej x, taktujemy zmienne y i z jako stałe, czyli można powiedzieć, że rozważamy funkcję postaci $f(x) = ax$, gdzie $a = yz$ jest stałe. Stąd

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} xyz = 1 \cdot yz \tag{1.6}$$

analogicznie postępujemy z pozostałymi zmiennymi i pochodnym cząstkowymi

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xz \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z} = xy \tag{1.7}$$

Zadanie 2. Oblicz pochodne cząstkowe funkcji

$$f(x,y) = x^y \tag{1.8}$$

$$f(x,y) = \sin(\frac{x}{y}) \tag{1.9}$$

$$f(x,y,z) = \tan(x)\arcsin(xy)\ln(xyz) \tag{1.10}$$

$$f(x,y,z) = e^{x\sin(yz)} + z^{y-3x} \tag{1.11}$$

$$f(x,y,z) = x^{y^z} \tag{1.12}$$

$$f(x,y,z) = \arctan(\ln(x+yz))e^{\frac{y}{x}} \tag{1.13}$$
$$f(x,y,z) = a^{x-\ln(xy)}e^{z} \tag{1.14}$$

(1.8) liczymy pochodną po $\frac{\partial}{\partial x}$ jako pochodną typu x^a, czyli traktujemy y jako stałą, więc

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1} \tag{1.15}$$

pochodna po y to natomiast pochodna funkcji wykładniczej o podstawie x, więc

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x \tag{1.16}$$

Kolejny przykład (1.9) to funkcja złożona, dla pochodnej po x mamy funkcję typu $\sin ax$ natomiast dla pochodnej po y mamy funkcję typu $\sin \frac{a}{y}$, więc

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a\cos ax = \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y} \tag{1.17}$$

oraz

$$\frac{\partial f}{\partial y} = a\cos\frac{a}{y}\cdot(-\frac{1}{y^2}) = -\frac{x}{y^2}\cos(\frac{x}{y}) \tag{1.18}$$

Przykład (1.10) będzie trzeba traktować jako iloczyn funkcji. W przypadku zmiennej x mamy sytuację

$$\tan(x)\arcsin(xa)\ln(xb) \tag{1.19}$$

więc

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\cos^2 x}\arcsin(ax)\ln(xb) + \frac{\tan x}{\sqrt{1-(ax)^2}}a\ln(xb) + \tan x\arcsin(ax)\frac{b}{xb} \tag{1.20}$$

czyli

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\arcsin(xy)\ln(xyz)}{\cos^2 x} + \frac{y\tan x\ln(xyz)}{\sqrt{1-x^2y^2}} + \frac{\tan x\arcsin(xy)}{x} \tag{1.21}$$

Pochodna cząstkowa po y to natomiast

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \tan x\Big(\frac{\ln(xyz)x}{\sqrt{1-x^2y^2}} + \frac{\arcsin(xy)}{y}\Big) \tag{1.22}$$

pochodna po z to pochodna funkcji typu $a\ln(bz)$ czyli

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \tan x\arcsin(xy)\frac{1}{z} \tag{1.23}$$

Przykład (1.11) to w pierwszym przypadku

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ae^{ax} + c(-3)\ln z z^{-3x} = \sin(yz)e^{x\sin(yz)} - 3z^y z^{-3x}\ln z \tag{1.24}$$

po y mamy

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos(yz)xze^{x\sin(yz)} + z^{y-3x}\ln z \tag{1.25}$$

po z

$$\frac{\partial f}{\partial z} = xy\cos(yz)e^{x\sin(yz)} + (y-3x)z^{y-3x-1} \tag{1.26}$$

Przykład (1.11). Dla zmiennej x jest to funkcja typu x^a, więc

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^z x^{y^z-1} \tag{1.27}$$

dla y jest to funkcja złożona. Złożenie funkcji a^y i funkcji y^b, czyli

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \ln x \cdot x^{y^z} \cdot y^{z-1} \cdot z \tag{1.28}$$

Pochodna po z jest to funkcja złożona typu $a^{g(z)}$. Czyli

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \ln a \cdot a^{g(z)} \cdot \frac{\partial g}{\partial z} = \ln a \cdot a^{g(z)} \cdot \ln y \cdot y^z = \ln x \ln y \cdot x^{y^z} \cdot y^z \tag{1.29}$$

W następnych przykładach postępujemy tak samo.

2 Różniczki

Różniczką funkcji $f(x)$ nazywamy zmianę funkcji względem zmian zmiennej niezależnej. Oznaczamy ją jako

$$\Delta f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\Delta x \tag{2.1}$$

gdy przechodzimy do infinitezymalnych przyrostów nasza definicja zamienia się

$$\mathrm{d}f = f'\mathrm{d}x \tag{2.2}$$

Zadanie 3. Oblicz różniczkę funkcji $f(x) = \sin x$.
Zgodnie z naszym wzorem

$$\mathrm{d}f = \cos x\mathrm{d}x \tag{2.3}$$

Zadanie 4. Oszacuj wielkość $(2.01)^3 + e^{2.01}$.
Jest to funkcja typu $f(x) = x^3 + e^x$. Żeby oszacować powyższe wyrażenie korzystamy ze wzoru

$$f(x + \mathrm{d}x) \approx f(x) + \mathrm{d}f \tag{2.4}$$

Pochodna funkcji $f(x)$ to

$$f' = 3x^2 + e^x \tag{2.5}$$

wartość funkcji w punkcie $x = 2$ to

$$2^3 + e^2 \approx 8 + 7.39 = 15.39 \tag{2.6}$$

Natomiast część z różniczki w punkcie $x = 2$ o przyroście $\mathrm{d}x = 0.01$ to

$$3 \cdot (2)^2 \cdot 0.01 + e^2 \cdot 0.01 \approx 12 \cdot 0.01 + 7.38 \cdot 0.01 \approx 0.12 + 0.07 = 0.19 \tag{2.7}$$

więc z dokładnością do dwóch liczb po przecinku mamy

$$(2.01)^3 + e^{2.01} = 15.39 + 0.19 \approx 15.58 \tag{2.8}$$

Zadanie 5. Oszacuj wielkość

$$z = \sqrt{4.02} \tag{2.9}$$

$$z = \log_2 2.02 \tag{2.10}$$

W pierwszym przykładzie mamy funkcję typu $\sqrt{x}$. Pochodna więc tej funkcji to

$$z' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} \tag{2.11}$$

Czyli

$$\sqrt{4.02} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot 0.02 = 2 + 0.005 = 2.005 \tag{2.12}$$

W drugim przykładzie mamy funkcję $f = \log_2 x$, , stąd

$$\log_2(2.02) \approx \log_2 2 + \frac{1}{2\ln 2} \cdot 0.02 \approx 1 + \frac{1}{2 \cdot 0.69} \cdot 0.02 \approx 1.014 \tag{2.13}$$

2.1 Różniczka zupełna

Różniczkę zupełną dla funkcji $f(x, y, z)$ definiujemy jako

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z \tag{2.14}$$

Zadanie 6. Oblicz różniczkę zupełną funkcji F

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \tag{2.15}$$
$$F(x, y, z) = x^2y^2z \tag{2.16}$$
$$F(x, y, z) = \frac{\sin(x^y)}{z^y} \tag{2.17}$$

W pierwszym przypadku jest to funkcja, która jest kombinacją liniową funkcji jednej zmiennej postaci $f(x) = x$, więc różniczka zupełna sprowadzi się do

$$\mathrm{d}F = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x_i \tag{2.18}$$

W drugim przypadku musimy policzyć pochodne cząstkowe, które wynoszą odpowiednio

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy^2z \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2x^2yz \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial z} = x^2y^2 \tag{2.19}$$

stąd

$$\mathrm{d}F = 2xy^2z\mathrm{d}x + 2x^2yz\mathrm{d}y + x^2y^2\mathrm{d}z \tag{2.20}$$

Ostatni przykład ma bardziej skomplikowane pochodne cząstkowe. Pochdona po x to

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\cos x^y}{z^y} \cdot yx^{y-1} \tag{2.21}$$

po y

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\cos x^y \ln x x^y z^y - \ln z z^y \sin x^y}{z^{2y}} = z^{-y}x^y \ln x \cos(x^y) - z^{-y} \sin x^y \ln z \tag{2.22}$$

po z

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -y\frac{\sin(x^y)}{z^{y-1}} \tag{2.23}$$

czyli różniczka zupełna jest postaci

$$\mathrm{d}F = \frac{\cos x^y}{z^y} \cdot yx^{y-1}\mathrm{d}x + (z^{-y}x^y \ln x \cos(x^y) - z^{-y} \sin x^y \ln z)\mathrm{d}y - y\frac{\sin(x^y)}{z^{y-1}}\mathrm{d}z \tag{2.24}$$

Zadanie 7. Oblicz przybliżoną wartość wyrażenia $(2.01)^3(3.03)(4.02)^2$.
Jest to wyrażenie postaci x^3yz^2. Stąd wystarczy policzyć różniczkę zupełną i dodać do funkcji w punktach $x = 2, y = 3, z = 4$. Więc

$$\mathrm{d}F = 3x^2yz^2\mathrm{d}x + x^3z^2\mathrm{d}y + 2x^3yz\mathrm{d}z \tag{2.25}$$

stąd

$$\begin{aligned}(2.01)^3(3.03)(4.02)^2 &\approx 8 \cdot 3 \cdot 16 + 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 16 \cdot 0.01 + 8 \cdot 16 \cdot 0.03 + 2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 0.02 \\ &= 384 + 5.76 + 3.84 + 3.84 = 397.44\end{aligned} \tag{2.26}$$