1 Pochodne wyższych rzędów

Pochodną rzędu drugiego lub drugą pochodną funkcji $y = f(x)$ nazywamy pochodną pierwszej pochodnej tej funkcji. Analogicznie definiujemy pochodne wyższych rzędów, jako pochodne pochodnych rzędu o jeden mniejszej.
Druga pochodna więc jest zdefiniowana:

$$y'' = (y')', \quad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{1.1}$$

Pochodne wyższych rzędów są oznaczane: $f^{(3)}$ pochodna trzeciego rzędu, $f^{(n)}$ pochodna $n-$tego rzędu.

Zadanie 1. Oblicz pochodną drugiego rzędu funkcji

$$f(x) = \arcsin^2 x \tag{1.2}$$
$$f(x) = x^2 e^{\sin x} \tag{1.3}$$
$$f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2} \tag{1.4}$$
$$f(x) = \ln^2(x^2+2) \tag{1.5}$$
$$f(x) = \frac{e^x}{1+x^2} \tag{1.6}$$
$$f(x) = \frac{\cos(x^2)}{1-\ln(\sin x)} \tag{1.7}$$

Liczymy najpierw pierwszą pochodną funkcji $\arcsin^2 x$. Traktujemy ją jako funkcję złożoną. Pochodna funkcji zewnętrznej to $2\arcsin x$, natomiast pochodna funkcji wewnętrznej to pochodna $\arcsin x$, więc pierwsza pochodna to

$$f'(x) = \frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \tag{1.8}$$

Teraz liczymy pochodną tej funkcji (czyli pochodną pochodnej) co doprowadzi nas do drugiej pochodnej funkcji $f(x)$. Traktujemy tę funkcję jako pochodną ilorazu, dlatego

$$f''(x) = 2\frac{\overbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}^{=(\arcsin x)'}\cdot\sqrt{1-x^2} - \arcsin x \cdot \overbrace{\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)}^{=(\sqrt{1-x^2})'}}{1-x^2} = 2\frac{1+\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} \tag{1.9}$$

Kolejny przykład trzeba traktować jako pochodną iloczynu, gdzie funkcję $\exp[\sin x]$ będziemy brali jako funkcję złożoną. Po raz kolejny swoją podróż rozpoczynamy od policzenia pierwszej pochodnej.

$$f'(x) = 2x\cdot e^{\sin x} + x^2\cdot e^{\sin x}\cdot\cos x = e^{\sin x}(2x + x^2\cos x) \tag{1.10}$$

Następnie obliczamy kolejną pochodną powyższego wyrażenia.

$$f''(x) = e^{\sin x} \cdot \cos x\Big(2x + x^2 \cos x\Big) + e^{\sin x}\Big(2 + 2x\cos x + x^2(-\sin x)\Big) \tag{1.11}$$

więc wynik wynosi

$$f''(x) = e^{\sin x}\Bigg(4x\cos x + x^2\cos^2 x + 2 - x^2 \sin x\Bigg) \tag{1.12}$$

Trzeci przykład jest pochodną ilorazu. Więc pierwsza pochodna wynosi

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+x^2) - 2x\ln x}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{x(1+x^2)} - 2\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2} \tag{1.13}$$

Licząc teraz pochodną powyższego wyrażenia otrzymujemy

$$f''(x) = -\frac{(1+x^2)+2x^2}{x^2(1+x^2)^2} - 2\frac{(\ln x + 1)(1+x^2)^2 - 2(1+x^2)\cdot 2x^2(x\ln x)}{(1+x^2)^4} \tag{1.14}$$

czyli

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2(1+x^2)} - \frac{2}{(1+x^2)^2} - 2\frac{\ln x + 1}{(1+x^2)^2} + 8\frac{x^2\ln x}{(1+x^2)^3} \tag{1.15}$$

ostatecznie

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2(1+x^2)} - \frac{4}{(1+x^2)^2} - 2\frac{\ln x}{(1+x^2)^2} + 8\frac{x^2\ln x}{(1+x^2)^3} \tag{1.16}$$

Kolejna funkcja jest złożona, więc pierwsza pochodna wynosi

$$f'(x) = \underbrace{2\ln(x^2+1)}_{zew} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^2+1}\cdot(2x)}_{wew} = 4\frac{x\ln(x^2+1)}{x^2+1} \tag{1.17}$$

teraz jest liczymy drugą pochodną, jako pochodną ilorazu (w liczniku mamy iloczyn)

$$f''(x) = 4\frac{\Big(\ln(x^2+1) + \frac{x}{x^2+1}\cdot(2x)\Big)\Big(x^2+1\Big) - 2x\Big(x\ln(x^2+1)\Big)}{(x^2+1)^2} \tag{1.18}$$

po uproszczeniach mamy

$$f''(x) = 4\frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1} + 8\frac{x^2}{(x^2+1)^2} - 8\frac{x^2\ln(x^2+1)}{(x^2+1)^2} \tag{1.19}$$

Kolejny przykład znowu traktujemy jako pochodną ilorazu. Stąd pierwsza pochodna wynosi

$$f'(x) = \frac{e^x(1+x^2) - 2xe^x}{(1+x^2)^2} = \frac{e^x}{1+x^2} - 2\frac{xe^x}{(1+x^2)^2} \tag{1.20}$$

licząc drugą pochodną można w pierwszym składniku skorzystać ze znanego rezultatu, ponieważ jest to nasza funkcja $f(x)$. Dlatego

$$f''(x) = \frac{e^x}{1+x^2} - 2\frac{xe^x}{(1+x^2)^2} - 2\frac{\Big(e^x(1+x)\Big)\Big(1+x^2\Big)^2 - 2(1+x^2)\cdot 2x \cdot \Big(xe^x\Big)}{(1+x^2)^4} \tag{1.21}$$

sprowadzając do bardziej transparentnej formy otrzymujemy

$$f''(x) = \frac{e^x}{1+x^2} - 2\frac{xe^x}{(1+x^2)^2} - 2\frac{e^x(1+x)}{(1+x^2)^2} + 8\frac{x^2e^x}{(1+x^2)^3} \tag{1.22}$$

czyli

$$f''(x) = \frac{e^x}{1+x^2} - 4\frac{xe^x}{(1+x^2)^2} - 2\frac{e^x}{(1+x^2)^2} + 8\frac{x^2e^x}{(1+x^2)^3} \tag{1.23}$$

Ostatni przykład rozwiązujemy przez analogię. Jest to iloraz funkcji funkcji złożonych

$$f'(x) = \frac{-2\sin x\cos x(1-\ln(\sin x)) - \Big(-\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x\Big)\cos^2 x}{\Big(1-\ln(\sin x)\Big)^2} = -\frac{\sin 2x}{(1-\ln(\sin x)}+\frac{\cot x\cdot\cos^2 x}{(1-\ln(\sin x))^2} \tag{1.24}$$

więc druga pochodna wynosi

$$f''(x) = -\frac{2\cos 2x(1-\ln(\sin x)) + \cot x\sin 2x}{(1-\ln(\sin x))^2} + \tag{1.25}$$

$$+\frac{(-\cot^2 x - 2\cos^2 x)(1-\ln(\sin x))^2 - 2(1-\ln(\sin x))\cdot(-\cot x)\cot x\cos^2 x}{(1-\ln(\sin x))^4} \tag{1.26}$$

Zadanie 2. Oblicz pochodną 4 rzędu funkcji:

$$f(x) = \sin x \tag{1.27}$$
$$f(x) = e^x \tag{1.28}$$
$$f(x) = e^{-ax} \tag{1.29}$$

Liczymy po kolei każdą pochodną.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x \\ f'(x) &= \cos x \\ f''(x) &= -\sin x \\ f'''(x) &= -\cos x \\ f^{(iv)}(x) &= \sin x \end{aligned} \tag{1.30}$$

W następnym łatwo zauważyć, że pochodna funkcji $f(x) = \exp(x)$ wynosi tyle samo co sam funkcja, więc pochodna dowolnego rzędu będzie wynosić zawsze $\exp(x)$, czyli

$$f^{(iv)}(x) = e^x \tag{1.31}$$

W następnym przypadku chciałoby się postąpić analogicznie, lecz to nie jest tak prosta funkcja. Z każdego różniczkowania, będziemy otrzymywać dodatkowy człon $-a$. Więc

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-ax} \\ f'(x) &= -ae^{-ax} \\ f''(x) &= -a(-a)e^{-ax} = a^2e^{-ax} \\ f'''(x) &= -a(a^2e^{-ax}) = -a^3e^{-ax} \\ f^{(iv)}(x) &= -a(a^3e^{-ax}) = a^4e^{-ax} \end{aligned} \tag{1.32}$$

2 Ekstrema funkcji

Jeżeli pochodna funkcji jest w pewnym przedziale dodatnia, to funkcja jest w tym przedziale jest rosnąca.
Jeżeli pochodna funkcji jest w pewnym przedziale ujemna, to funkcja jest w tym przedziale jest malejąca.
Jeżeli pochodna funkcji jest w każdym punkcie pewnego przedziału równa zero. To funkcja ma w tym przedziale wartość stałą.

Definicja 1. Mówimy, że funkcja $y = f(x)$ ma w punkcie x_0 maksimum lokalne (minimum lokalne) jeżeli istnieje takie otoczenie punktu x_0, że dla wszystkich punktów tego otoczenia zachodzi nierówność:

$$f(x) < f(x_0) \quad , \quad \big(f(x) > f(x_0)\big) \tag{2.1}$$

Maksima i minima noszą wspólną nazwę ekstremów funkcji.

Twierdzenie 2 (Fermata)**.** Jeżeli funkcja różniczkowalna w przedziale osiąga w pewnym punkcie wewnętrznym $x = x_0$ tego przedziału ekstremum lokalne, to pochodna w tym punkcie $f'(x_0) = 0$.

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Może być, że pochodna jest równa zero, natomiast w tym punkcie nie ma ekstremum. Na przykład funkcja $f(x) = x^3$, ma zerową potęgę w punkcie $x = 0$, natomiast w tym punkcie nie istnieje ekstremum lokalne.
Jeżeli pierwsza pochodna $f'(x)$ dla $x < x_0$ jest ujemna (dodatnia), dla $x = x_0$ jest równa zero, a dla $x > x_0$ jest dodatnia (ujemna) to funkcja osiąga w tym punkcie ekstremum lokalne (minimum w pierwszym przypadku i maksimum w drugim przypadku). Krócej mówiąc, funkcja ma minimum (maksimum) jeżeli pochodna zmienia znak z ujemnego na dodatni (z dodatniego na

ujemny) podczas przejścia przez punkt x_0.

Definicja 3. Funkcję różniczkowalną $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ nazywamy wypukłą, o ile wykres funkcji leży nad każdą styczną do niego.
Jeżeli wykres leży pod styczną, to mówimy, że funkcja f jest wklęsła na odcinku (a,b).

Jak funkcja jest wypukła, to pochodna rośnie.

Definicja 4. Jeżeli $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna i

$$\forall_x \; f''(x) > 0 \quad \Big(f''(x) < 0\Big) \tag{2.2}$$

to f jest wypukła (wklęsła) na odcinku (a,b).
Punkt, w którym funkcja zmienia się z wypukłej we wklęsłą (lub na odwrót) nazywamy punktem przegięcia. Jeżeli druga pochodna zmienia znak w punkcie x_0 to w punkcie x_0 f ma punkt przegięcia. Czyli druga pochodna musi się zerować w punkcie przegięcia.

Definicja 5. Funkcja jest wypukła (wklęsła) jeżeli

$$f\Big(ax_1 + (1-a)x_2\Big) \leqslant af(x_1) + (1-a)f(x_2) \tag{2.3}$$

$$\bigg(f\Big(ax_1 + (1-a)x_2\Big) \geqslant af(x_1) + (1-a)f(x_2)\bigg) \tag{2.4}$$

Zadanie 3. Znaleźć ekstrema następujących funkcji oraz punkty przegięcia.

$$f(x) = x^3 + 12x^2 + 36x - 50 \tag{2.5}$$

$$f(x) = x + \frac{4}{x} \tag{2.6}$$

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1} \tag{2.7}$$

Liczymy pierwszą pochodną powyższych funkcji i sprawdzamy, w którym miejscu się ona zeruje. Dla pierwszego przypadku

$$f'(x) = 3x^2 + 24x + 36 \tag{2.8}$$

Powyższe wyrażenie można podzielić przez 3, w momencie gdy szukamy miejsc zerowych. Dlatego rozwiązujemy równanie

$$x^2 + 8x + 12 = 0 \tag{2.9}$$

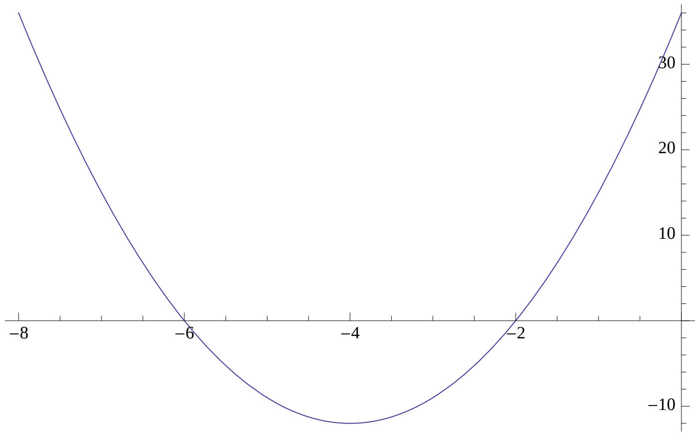
Delta dla tego równania wynosi

$$\Delta = 64 - 48 = 16 \tag{2.10}$$

Więc miejsca zerowe to

$$x_1 = \frac{-8-4}{2} = -6 \quad , \quad x_2 = \frac{-8+4}{2} = -2 \tag{2.11}$$

Rysując wykres tej funkcji kwadratowej, widzimy, że pochodna zmienia znak podczas przechodzenia przez punkty x_1 i x_2. Ponieważ w punkcie $x_1 = -6$ funkcja zmienia się z dodatniej na ujemną, więc w tym punkcie mamy maksimum. Natomiast w punkcie $x_2 = -2$ funkcja zmienia się z ujemnej na dodatnią, więc jest to minimum. Żeby obliczyć punkty przegięcia, należy

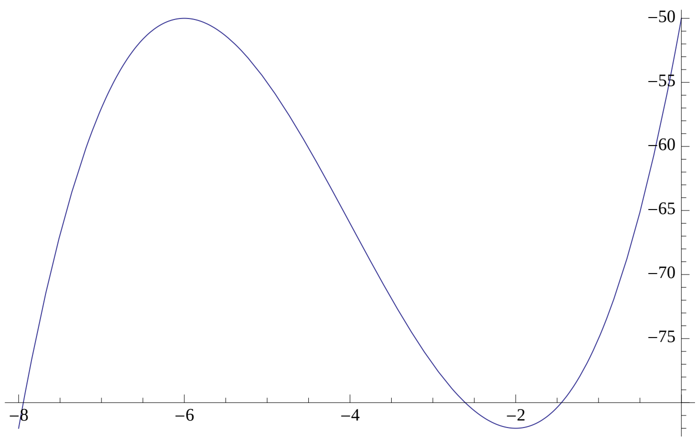


policzyć drugą pochodną i przyrównać ją do zera.

$$f''(x) = 6x + 24 \tag{2.12}$$

czyli $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -4$. Ponieważ pochodna w tym punkcie zmienia znak, więc mamy tutaj punkt przegięcia.

Rysunek prezentuje funkcję $f(x)$, na której widać, że w punktach x_1, x_2 są ekstrema lokalne, natomiast, w $x_0 = -4$ jest punkt przegięcia.



Kolejny przykład robimy analogicznie. Pierwsza pochodna wynosi

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} \tag{2.13}$$

Przyrównując ją do zera mamy

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \quad , \quad x_2 = -2 \tag{2.14}$$

Sprawdzamy czy pochodna zmienia znak w otoczeniu tych punktów. Można sprawdzić dla $2+\varepsilon$ i dla $2-\varepsilon$ w pierwszym przypadku i $-2+\varepsilon$ i $-2-\varepsilon$ w drugim.

$$f'(2+\varepsilon) = 1 - \frac{4}{\underbrace{4+2\varepsilon+\varepsilon^2}_{>4}} > 0 \quad , \quad f'(2-\varepsilon) = 1 - \frac{4}{\underbrace{4-2\varepsilon+\varepsilon^2}_{<4}} < 0 \tag{2.15}$$

czyli w punkcie $x_1 = 2$ mamy minimum. Dla drugiego punktu

$$f'(-2-\varepsilon) = 1 - \frac{4}{\underbrace{4+2\varepsilon+\varepsilon^2}_{>4}} > 0 \quad , \quad f'(-2+\varepsilon) = 1 - \frac{4}{\underbrace{4-2\varepsilon+\varepsilon^2}_{<4}} < 0 \tag{2.16}$$

Tutaj pochodna zmienia się z dodatniej na ujemną, więc jest maksimum. Liczymy, drugą pochodną, w celu odnalezienia punktów podejrzanych o przegięcie.

$$f''(x) = \frac{8}{x^3} \tag{2.17}$$

Nie ma punktów, które by spełniały warunek $f''(x) = 0$. Czyli dla tej funkcji nie istnieją punkty przegięcia.
Liczymy pierwszą pochodną następnej funkcji

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} \tag{2.18}$$

przyrównujemy pochodną do zera, co jest równoważne, gdy licznik tej pochodnej jest równy zero.

$$0 = f'(x) \Leftrightarrow 2(1-x^2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -1 \tag{2.19}$$

Badamy jak się pochodna zachowuje w najbliższym otoczeniu punktu $x_0 = 1$.

$$f'(1-\varepsilon) = \frac{2(1-1+2\varepsilon-\varepsilon^2)}{\underbrace{(1-2\varepsilon+\varepsilon^2+1+1)^2}_{>0}} > 0 \quad , \quad f'(1+\varepsilon) = \frac{2(1-1-2\varepsilon-\varepsilon^2)}{\underbrace{(1-2\varepsilon+\varepsilon^2+1+1)^2}_{>0}} < 0 \tag{2.20}$$

Ponieważ pochodna zmienia znak z dodatniego na ujemny, więc w punkcie $x_0 = 1$ mamy maksimum.
Liczymy drugą pochodną i przyrównujemy ją do zera

$$f''(x) = \frac{-4x(1+x^2)^2 - 2x^2 \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = -\frac{4x(1+x^2)+8x^2}{(1+x^2)^3} \tag{2.21}$$

Czyli $f''(x) = 0$ wyłącznie gdy $x(1 + x^2 + 2x) = 0$ czyli $x(x + 1)^2 = 0$, punkty podejrzane to $x = 0$ i $x = -1$. Sprawdzamy, czy mamy zmianę znaku dla $x = 0$, dla $x = -1$ nie trzeba sprawdzać, bo wiemy, że w tym punkcie jest ekstremum. Sprawdzamy poprzez wykres, ponieważ mianownik zawsze będzie dodatni.Mamy zmianę znaku. Więc w zerze mamy punkt przegięcia.

Zadanie 4. W przedziale $[0,\ 2\pi]$ znajdź punkty przegięcia.

$$f(x) = \sin x \tag{2.22}$$

$$f(x) = \cos^2 x \tag{2.23}$$

Liczymy drugie pochodne powyższych funkcji.

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f''(x) = -\sin(x) \tag{2.24}$$

Mamy zmiany znaków dla $x = \pi$, więc w tym miejscu jest punkt przegięcia. Dla drugiego przypadku.

$$f'(x) = -2\cos x \sin x = -2\sin 2x \tag{2.25}$$

Druga pochodna to

$$f''(x) = -4\cos 2x \tag{2.26}$$

Funkcja $\cos 2x$ zeruje się dla $x = \pi/4$ oraz $x = 3/4\pi$, $x = 5/4\pi$ i $x = 7/4\pi$ Są to punkty przegięcia tej funkcji.