

1 Iloczyn wektorowy

Iloczyn wektorowy wektorów $\vec{a} \times \vec{b}$ jest wielkością **wektorową**, tzn. wynik takiego iloczynu jest również wektorem.

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\angle(\vec{a}, \vec{b})) \vec{e}_\perp, \quad (1.1)$$

gdzie $\vec{e}_\perp$ jest wektorem jednocześnie prostopadłym do $\vec{a}$ i $\vec{b}$, tzn. $\vec{e}_\perp \perp \vec{a}$ i $\vec{e}_\perp \perp \vec{b}$.

Wyrażenie iloczynu wektorowego przy użyciu wyznacznika:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \left(\underbrace{a_y b_z - a_z b_y}_{c_x}, \underbrace{a_z b_x - a_x b_z}_{c_y}, \underbrace{a_x b_y - a_y b_x}_{c_z} \right) \quad (1.2)$$

Iloczyn wektorowy jest antyprzemienny, tzn. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

Zadanie 1. Oblicz iloczyn wektorowy $\vec{a} \times \vec{b}$:

- $\vec{a} = (1, 0, -3)$, $\vec{b} = (-1, \frac{1}{2}, 0)$, $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.
- $\vec{a} = (-1, 1, \frac{1}{3})$, $\vec{b} = (0, -1, 0)$, $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$.

$$\vec{c} = \left(0 \cdot 0 - (-3) \cdot \frac{1}{2}, -3 \cdot (-1) - 0 \cdot 1, \frac{1}{2} - 0 \cdot (-1) \right) = \left(\frac{3}{2}, 3, \frac{1}{2} \right).$$

$$\vec{d} = \left(1 \cdot 0 - (-1) \cdot \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \cdot 0 - 0 \cdot (-1), -1 \cdot (-1) - 1 \cdot 0 \right) = \left(\frac{1}{3}, 0, 1 \right)$$

Zadanie 2. Dane są $|a| = \sqrt{3}$, $|b| = 3$, i $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{9}{2}$ oblicz $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

$$\frac{9}{2} = \vec{a} \cdot \vec{b} = 3\sqrt{3} \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{9}{2 \cdot 3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6} \quad (1.3)$$

więc

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = 3\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (1.4)$$

2 Iloczyn mieszany

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (2.1)$$

Trzy wektory liniowo niezależne mogą rozpiąć równoległoscian. Objętość równoległoscianu wyraża się wzorem:

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| \quad (2.2)$$

Zadanie 3. Obliczyć objętość równoległościanu zbudowanego na wektorach:

- $\vec{a} = (1, 0, 3)$, $\vec{b} = (0, -1, \frac{1}{2})$, $\vec{c} = (-\frac{1}{3}, -1, 1)$
- $\vec{a} = (6, 4, 2)$, $\vec{b} = (-9, 6, 3)$, $\vec{c} = (-3, 6, 3)$.

Liczmy wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{3}{2} \quad (2.3)$$

bierzemy wartość bezwzględną, więc $V = \frac{3}{2}$.

Warto zauważyć, że wektory, te rozważane były w zadaniu na zajęciach o wektorach, w punkcie drugim. Otrzymaliśmy, że wektory są liniowo zależne, tzn. wektor $\vec{c}$ można przedstawić jako kombinację wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$, więc objętość takiego czworościanu, będzie wynosić zero. Ponieważ

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}) = \underbrace{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \alpha \vec{a}}_{(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}} + \underbrace{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \beta \vec{b}}_{(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}} = 0 \quad (2.4)$$

Jeżeli obliczymy wyznacznik, otrzymamy również zero.

$$\begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 \\ -9 & 6 & 3 \\ -3 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.5)$$

Zadanie 4. Objętość równoległościanu zbudowanego na wektorach $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ jest równa 3. Obliczyć objętość równoległościanu zbudowanego na wektorach $\vec{a} = \vec{p} + \vec{q} - \vec{r}$, $\vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q} + \vec{r}$, $\vec{c} = \vec{p} + 2\vec{q} - 3\vec{r}$.

Wystarczy przemnożyć $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$. Zajmijmy się najpierw iloczynem wektorowym (wymnóżmy każdy wyraz):

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (\vec{p} + \vec{q} - \vec{r}) \times (2\vec{p} - \vec{q} + \vec{r}) = \underbrace{\vec{p} \times 2\vec{p}}_{=0} - \vec{p} \times \vec{q} + \underbrace{\vec{p} \times \vec{r}}_{-\vec{r} \times \vec{p}} + 2\underbrace{\vec{q} \times \vec{p}}_{-\vec{p} \times \vec{q}} - \underbrace{\vec{q} \times \vec{q}}_{=0} + \\ &\quad + \vec{q} \times \vec{r} - \vec{r} \times 2\vec{p} + \underbrace{\vec{r} \times \vec{q}}_{-\vec{q} \times \vec{r}} - \underbrace{\vec{r} \times \vec{r}}_{=0} = -3\vec{p} \times \vec{q} - 3\vec{r} \times \vec{p} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Mnożąc skalarnie przez wektor $\vec{c}$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} (-3\vec{p} \times \vec{q} - 3\vec{r} \times \vec{p}) \cdot (\vec{p} + 2\vec{q} - 3\vec{r}) &= -3\underbrace{(\vec{p} \times \vec{q}) \cdot \vec{p}}_{=0} - 3\underbrace{(\vec{p} \times \vec{q}) \cdot 2\vec{q}}_{=0} + 9(\vec{p} \times \vec{q}) \cdot \vec{r} - \\ &\quad - 3\underbrace{(\vec{r} \times \vec{p}) \cdot \vec{p}}_{=0} + 9\underbrace{(\vec{r} \times \vec{p}) \cdot 2\vec{q}}_{(\vec{p} \times \vec{q}) \cdot \vec{r}} - 6\underbrace{(\vec{r} \times \vec{p}) \cdot \vec{r}}_{=0} = 3(\vec{p} \times \vec{q}) \cdot \vec{r} = 9 \end{aligned} \quad (2.7)$$

3 Równania prostej i płaszczyzny

3.1 Prosta

Równanie prostej w najogólniejszej formie jest przedstawione przez (dwuwymiarowy układ kartezjański)

$$Ax + By + C = 0, \quad (3.1)$$

gdzie $A, B, C \in \mathbb{R}$ i A, B nie są jednocześnie równe zeru.

Wektor o współrzędnych $(-B, A)$ jest wektorem kierunkowym prostej i jest on do niej równoległy.

Wektor o współrzędnych (A, B) jest prostopadły do prostej.

Równanie parametryczne. Prosta o niezerowym wektorze kierunkowym $\vec{\alpha} = (u_1, u_2)$, przechodząca przez punkt $A = (x_A, y_A)$ to zbiór punktów $P = (x, y)$ takich, że

$$P = A + t\vec{\alpha}, \quad (3.2)$$

dla dowolnych $t \in \mathbb{R}$.

Można powyższe równanie rozpisać w postaci układu równań

$$\begin{cases} x &= x_A + tu_1 \\ y &= y_A + tu_2 \end{cases} \quad (3.3)$$

Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B)$ jest postaci

$$(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0 \quad (3.4)$$

lub w wersji parametrycznej

$$\begin{cases} x &= x_A + t(x_B - x_A) \\ y &= y_A + t(y_B - y_A) \end{cases} \quad (3.5)$$

Zadanie 5. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty

$$A = (1, -2) \quad B = (0, 3) \quad (3.6)$$

$$A = (2, 2) \quad B = (2, 3) \quad (3.7)$$

$$A = (-1, -3) \quad B = (1, -2) \quad (3.8)$$

i wyznacz wektor kierunkowy i wektor prostopadły do tej osi.

Zadanie 6. Wyznacz prostą o wektorze kierunkowym $\vec{\alpha}$, która przechodzi przez punkt A

$$\vec{\alpha} = (1, 2) \quad A = (2, 3) \quad (3.9)$$

$$\vec{\alpha} = (-1, 3) \quad A = (1, 3) \quad (3.10)$$

$$\vec{\alpha} = (2, 0) \quad A = (3, 4) \quad (3.11)$$

3.2 Płaszczyzna

Równanie ogólne płaszczyzny w euklidesowej przestrzeni $\mathbb{R}^3$ dane jest

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (3.12)$$

$A, B, C \in \mathbb{R}$ i A, B, C jednocześnie nie mogą być równe zeru. Wektor (A, B, C) jest wektorem normalnym prostopadłym do tej płaszczyzny.

Płaszczyzna przechodząca przez 3 punkty $P_1 = (x_1, y_1, z_1), P_2 = (x_2, y_2, z_2), P_3 = (x_3, y_3, z_3)$ jest określona równaniem

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ x - x_3 & y - y_3 & z - z_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.13)$$

Zadanie 7. Wyznacz równanie płaszczyzny przechodzącej przez trzy punkty P_1, P_2, P_3 i oblicz wektor normalny do tej płaszczyzny.

$$P_1 = (1, 1, 0) \quad P_2 = (-1, 0, 1) \quad P_3 = (2, 1, -1) \quad (3.14)$$

$$P_1 = (0, 0, 0) \quad P_2 = (1, 3, 1) \quad P_3 = (-1, 2, 2) \quad (3.15)$$