

1 Granice funkcji

Definicja 1 (Granica w sensie Cauchy'ego). Mówimy, że liczba g jest granicą funkcji $f(x)$ w punkcie $x = a$, co zapisujemy

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g \quad (1.1)$$

jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ można wskazać taką liczbę (istnieje taka liczba) $\delta > 0$, żeby było spełnione

$$|f(x) - g| < \varepsilon \quad \text{dla} \quad a - \delta < x < a \quad (1.2)$$

Formłanie

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \left(|x - a| < \delta \right) \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon \quad (1.3)$$

Twierdzenia pomocnicze w liczeniu granic.

Twierdzenie 2. Jeżeli

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b \quad (1.4)$$

to

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b \quad (1.5)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b \quad (1.6)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \div g(x)) = \frac{a}{b} \quad \text{dla} \quad b \neq 0 \quad (1.7)$$

Twierdzenie 3 (O kanapce). Jeżeli w otoczeniu x_0 mamy $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ oraz

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A \quad (1.8)$$

to

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \quad (1.9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (1.10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (1.11)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \quad (1.12)$$

Zadanie 1. Oblicz granicę w punkcie

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{-x^3 - 2x^2 + x + 2}{2x - 3} = \frac{-\frac{1}{27} - \frac{6}{27} + \frac{9}{27} + \frac{54}{27}}{-\frac{8}{3}} = -\frac{7}{9} \quad (1.13)$$

Zadanie 2. Oblicz granicę

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - 17}{\frac{3}{5}x^3 + 17x^2 - 9x + 11} = \quad (1.14)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x^2 - 2x^3 + 7x - 1) - 13}{\frac{1}{7}x^5 - x^2 + 6x^4 - 12} = \quad (1.15)$$

W obu przypadkach dzielimy licznik i mianownik przez największą potęgę x , jaka występuje (nie może być ona w liczniku lub w mianowniku). Pierwszy przykład więc sprowadza się do

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \overbrace{\frac{2}{x}}^{\rightarrow 0} + \overbrace{\frac{4}{3x^2}}^{\rightarrow 0} - \overbrace{\frac{17}{x^3}}^{\rightarrow 0}}{\underbrace{\frac{3}{5}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{17}{x}}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\frac{9}{x^2}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{11}{x^3}}_{\rightarrow 0}} = 3 \cdot \frac{5}{3} = 5 \quad (1.16)$$

wyrażenia zaznaczone dążą do zera, gdy $x \rightarrow +\infty$, więc całość zmierza do 5.

W drugim przypadku, najwyższą potęgą jest x^5 . Po podzieleniu otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overbrace{\frac{1}{x^4}}^{\rightarrow 0} - \overbrace{\frac{2}{x}}^{\rightarrow 0} + \overbrace{\frac{7}{x^3}}^{\rightarrow 0} - \overbrace{\frac{1}{x^4}}^{\rightarrow 0} - \overbrace{\frac{13}{x^5}}^{\rightarrow 0}}{\frac{1}{7} - \underbrace{\frac{1}{x^3}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{6}{x}}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\frac{12}{x^5}}_{\rightarrow 0}} = 0 \quad (1.17)$$

W mianowniku każdy z wyrazów dąży do zera, więc całość zbiega do zera.

Zadanie 3. Policz granicę funkcji

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x + 1}{e^x - 1 + \cos x} = 1 \quad (1.18)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{2x} = \frac{3}{2} \quad (1.19)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^3 - 2x + 1} = \quad (1.20)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x}{\tan 3x} = \quad (1.21)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x(x - \sqrt{x^2 - 1})} = \quad (1.22)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = \quad (1.23)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \quad (1.24)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \quad (1.25)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x)^{\frac{1}{x}} = \quad (1.26)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + kx)^{\frac{n}{x}} = \quad (1.27)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\pi}{x}\right)^{nx} = \quad (1.28)$$

Rozwiązania:

Pierwsze zadanie liczymy podług twierdzenia 5. Obliczamy poszczególne granice. W liczniku mamy

$$x - \sin x + 1 \rightarrow 1 \quad (1.29)$$

ponieważ $x \rightarrow 0$, $\sin x \rightarrow 0$. W mianowniku mamy $e^x \rightarrow 1$ oraz $\cos x \rightarrow 1$, więc ostatecznie otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x + 1}{e^x - 1 + \cos x} = 1 \quad (1.30)$$

Drugie zadanie. Sprowadzamy funkcję do postaci, z której możemy skorzystać z naszych twierdzeń, czyli chcemy mieć coś w stylu:

$$\frac{\sin x}{x} \quad (1.31)$$

dlatego $\tan 3x$ przedstawiamy

$$\tan 3x = \frac{\sin 3x}{\cos 3x} \quad (1.32)$$

Ponieważ w mianowniku występuje $2x$, a chcemy mieć $3x$, więc rozszerzamy licznik i mianownik przez 3. Wtedy

$$\frac{\tan 3x}{2x} = \frac{3}{2} \underbrace{\frac{\sin 3x}{3x}}_{\rightarrow 1} \underbrace{\frac{1}{\cos 3x}}_{\rightarrow 1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{3}{2} \quad (1.33)$$

W następnym zadaniu jeżeli popatrzymy na licznik i mianownik to jednocześnie zbiegają do zera! Jak sobie poradzić z takimi wyrażeniami? Musimy trochę przekształcić. Podzielmy mianownik przez $(x - 1)$ co otrzymamy?

$$x^3 - 2x + 1 : x - 1 = x^2 + x - 1 \quad (1.34)$$

Można podzielić normalnie ten wielomian, bądź skorzystać ze schematu Hornera, dla którego tabela przedstawia się następująco:

	1	0	-2	1
1	1	1	-1	0

jak widać wynik jest identyczny. Teraz przedstawiając wielomian z mianownika w postaci iloczynu wielomianów

$$x^3 - 2x + 1 = (x^2 + x - 1)(x - 1) \quad (1.35)$$

wstawiając do naszego wyrażenia pod granicą otrzymujemy

$$\frac{x \neq 1}{(x^2 + x - 1)(x \neq 1)} \rightarrow 1 \quad (1.36)$$

Zadanie czwarte staramy przedstawić się jako $\sin x/x$, więc

$$\frac{10x}{\tan 3x} = \frac{10x \cos 3x}{\sin 3x} = \frac{10}{3} \cos 3x \frac{3x}{\sin 3x} \rightarrow \frac{10}{3} \quad (1.37)$$

W tym zadaniu nie wiemy czy ta granica jest nieskończona czy skończona. Na pierwszy rzut oka trudno nam oszacować czy któreś z wyrażeń pod pierwiastkiem szybciej czy wolniej dąży do nieskończoności. Najpierw przemnożmy licznik i mianownik przez $\sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}}$. Otrzymamy wtedy

$$\sqrt{x(x - \sqrt{x^2 - 1})} \cdot \frac{\sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}}}{\sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}}} = \sqrt{x} \sqrt{x^2 - x^2 + 1} \frac{1}{\sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}}} \quad (1.38)$$

wyciągnijmy z mianownika $\sqrt{x}$ stąd będziemy mieli

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\rightarrow 0}}}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (1.39)$$

Co należy zrobić w tym zadaniu? Nie uda nam się doprowadzić do postaci, którą znamy z twierdzenia. Niemniej jednak należy skorzystać, że funkcja sinus jest ograniczona, czyli praktycznie rozważamy funkcję postaci:

$$\frac{1}{x} \rightarrow 0 \quad \text{dla} \quad x \rightarrow \infty \quad (1.40)$$

W tym zadaniu należy podstawić za $\arctan x = \alpha$. Trzeba pamiętać, że w momencie gdy wykonujemy jakieś podstawienie, należy pamiętać o zmianie granicy. W tym przypadku, gdy $x \rightarrow 0 \Rightarrow \arctan x \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha \rightarrow 0$, więc się nic nie zmienia. Z własności funkcji cyklometrycznych wynika, że $x = \tan \alpha$. Stąd mamy

$$\frac{\arctan x}{x} = \frac{\alpha}{\tan \alpha} = \cos \alpha \frac{\alpha}{\sin \alpha} \rightarrow 1 \quad (1.41)$$

Kolejne zadanie wymaga skorzystania ze wzorów trygonometrycznych. Ponieważ $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, a $\sin 3x = \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = 2 \sin x \cos^2 x + \cos^2 x \sin x - \sin^3 x = \sin x(3 \cos^2 x - \sin^2 x)$, więc

$$\frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \frac{2 \sin x \overbrace{\cos x}^{\rightarrow 1}}{\sin x (\underbrace{3 \cos^2 x}_{\rightarrow 1} - \underbrace{\sin^2 x}_{\rightarrow 0})} \rightarrow \frac{2}{3} \quad (1.42)$$

Następne trzy zadania są związane z granicą liczby e .

Wyrażenie w nawiasie staramy się doprowadzić do postaci, jaka jest w twierdzeniu. Stąd

$$(1 - 3x)^{\frac{1}{x}} = \left[(1 - 3x)^{-\frac{1}{3x}} \right]^{-3} \rightarrow e^{-3} \quad (1.43)$$

Następne to

$$(1 + kx)^{\frac{n}{x}} = \left[(1 + kx)^{\frac{1}{kx}} \right]^{nk} \rightarrow e^{nk} \quad (1.44)$$

W ostatnim przykładzie mamy sytuację trochę odmienną, ponieważ granica rozważana jest w nieskończoności. Jednak widać, że wyrażenie pod granicą zbiega do tych samych wartości co w przypadku twierdzenia. Czyli również będzie to „jakieś” e . W analogiczny sposób przekształcamy i mamy

$$\left(1 - \frac{\pi}{x}\right)^{nx} = \left(\left(1 - \frac{\pi}{x}\right)^{-\frac{x}{\pi}} \right)^{-n\pi} \rightarrow e^{-n\pi} \quad (1.45)$$