

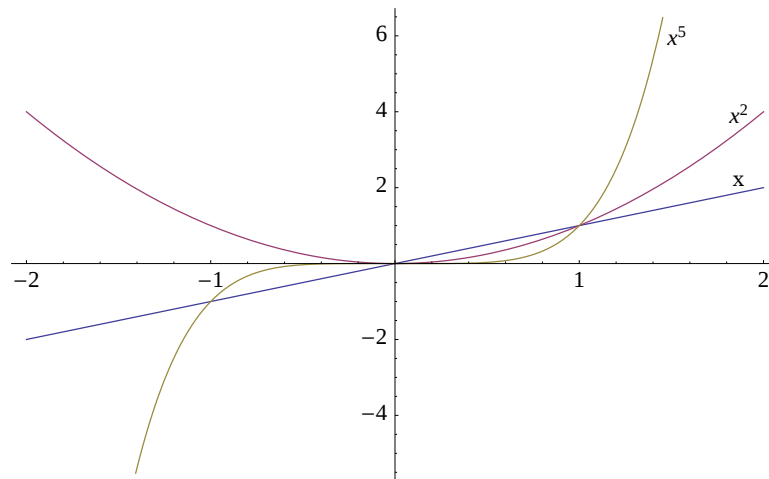
1 Funkcje elementarne

Funkcje elementarne, które będziemy rozważać to:

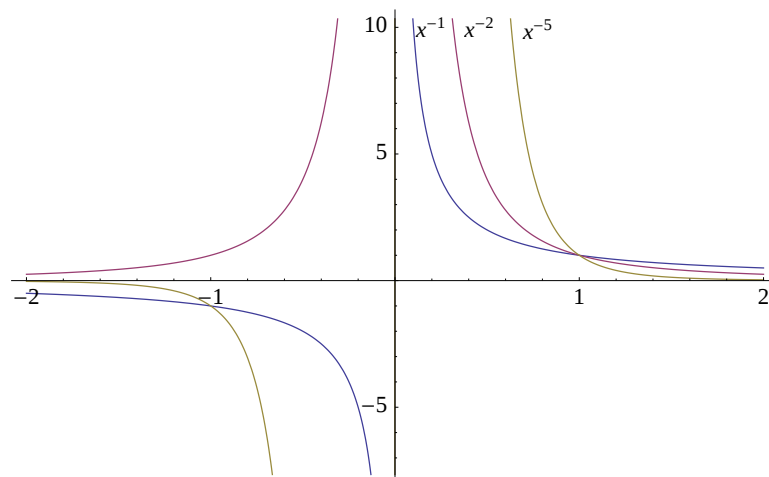
x^a , a^x , $\log_a(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, $\cot(x)$, $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$, $\arctan(x)$, $\operatorname{arccotg}(x)$.

1.1 Funkcje x^a .

$a > 0$, oraz $a \in \mathbb{N}$ dziedziną funkcji jest $\mathbb{R}$.

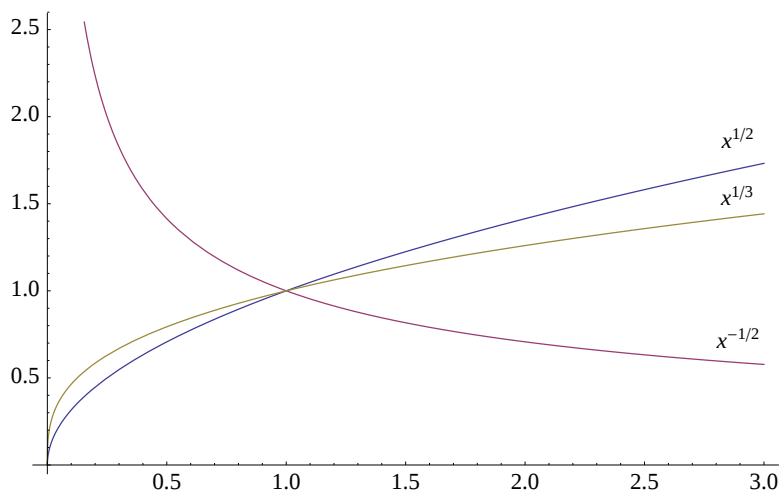


$a < 0$, oraz $a \in \mathbb{Z}$ dziedziną funkcji jest $\mathbb{R} \setminus \{0\}$



Wykres takiej funkcji nazywa się hiperbolą.

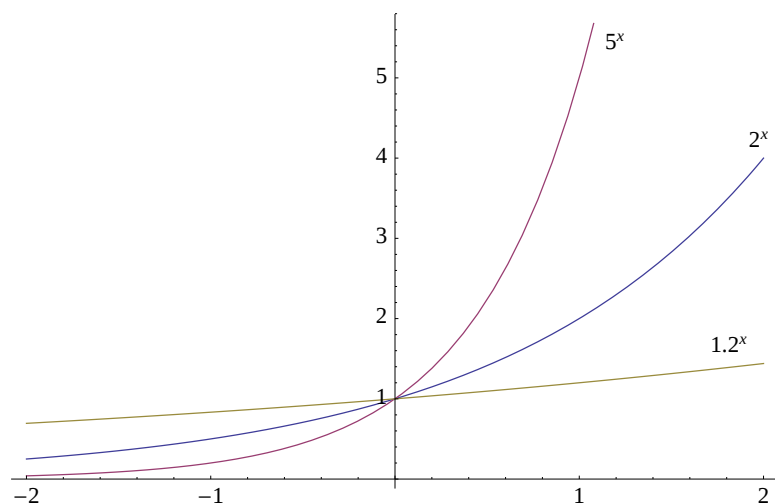
$a \in \mathbb{R}$ (tutaj rozważmy przypadki kiedy potęga jest liczbą wymierną), dziedziną funkcji to $\mathbb{R}_+$ (dla $1/p$, gdzie p - parzyste) i $\mathbb{R}$ dla p nieparzystych. Dla ujemnych potęg zero nie znajduje



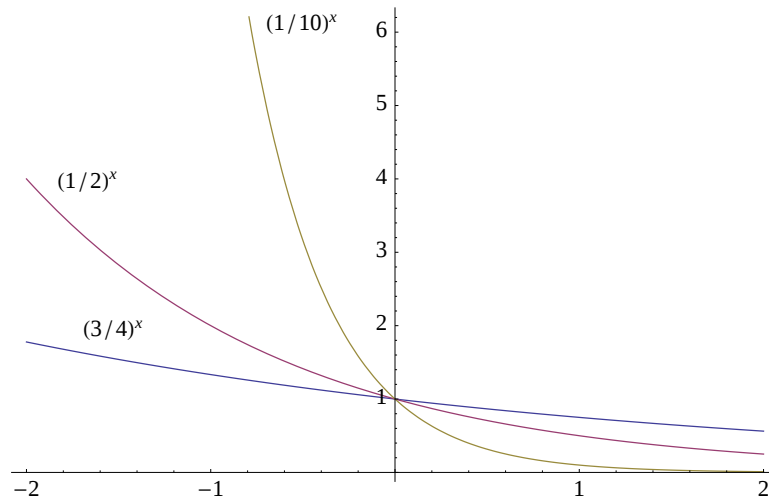
się w dziedzinie, natomiast, kiedy mamy dodatnie potęgi, zero jest uwzględnione w dziedzinie.

1.2 Funkcje wykładnicze a^x

$a > 0$, dziedziną funkcji to $\mathbb{R}$. Dla $a = 1$ funkcja jest stała. Dla $a > 1$ jest funkcją rosnącą dla



$a < 1$ mamy funkcję malejącą.



Właściwości:

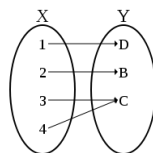
- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
- $a^{x \cdot y} = (a^x)^y$
- $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$

Najbardziej powszechną i najczęściej stosowaną funkcją wykładniczą w fizyce jest $e^x \equiv \exp(x)$, gdzie e jest podstawą logarytmu naturalnego.

Dla $a > 0$ oraz $a \neq 1$ funkcja wykładnicza jest różnowartościowa i „na” (czyli jest bijekcją). Dlatego istnieje funkcja odwrotna.

Definicja 1. Funkcja $f: X \rightarrow Y$ jest „na” zbiór Y o ile jest spełniony warunek

$$\forall_{y \in Y} \exists_{x \in X} \quad y = f(x)$$

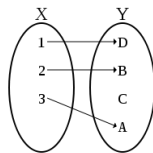


(Nazywana suriekcją)

Definicja 2. Funkcja $f: X \rightarrow Y$ jest różnowartościowa o ile spełniony jest warunek

$$\forall_{x_1, x_2 \in X} \quad (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)) \Leftrightarrow \forall_{x_1, x_2 \in X} \quad (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$$

Czyli różnym argumentom odpowiadają różne wartości. (Nazywana iniekcją)



1.3 Funkcje logarytmiczne

Funkcja logarytmiczna jest funkcją odwrotną dla funkcji wykładniczej.

$$f(x) = \log_a x \tag{1.1}$$

gdzie a jest podstawą logarytmu i $a > 0$, $a \neq 1$.

Jeżeli $\log_a x = b \Leftrightarrow a^b = x$.

Dziedziną funkcji logarytmicznej jest $(0, +\infty)$, $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Dla $a > 1$ jest funkcją rosnącą, natomiast dla $a \in (0, 1)$ jest malejąca.

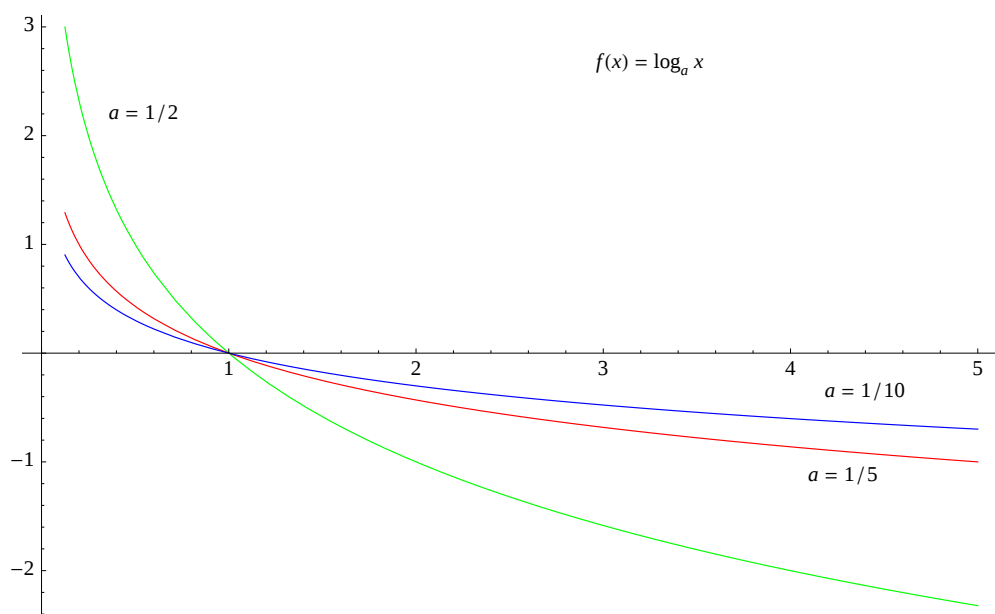
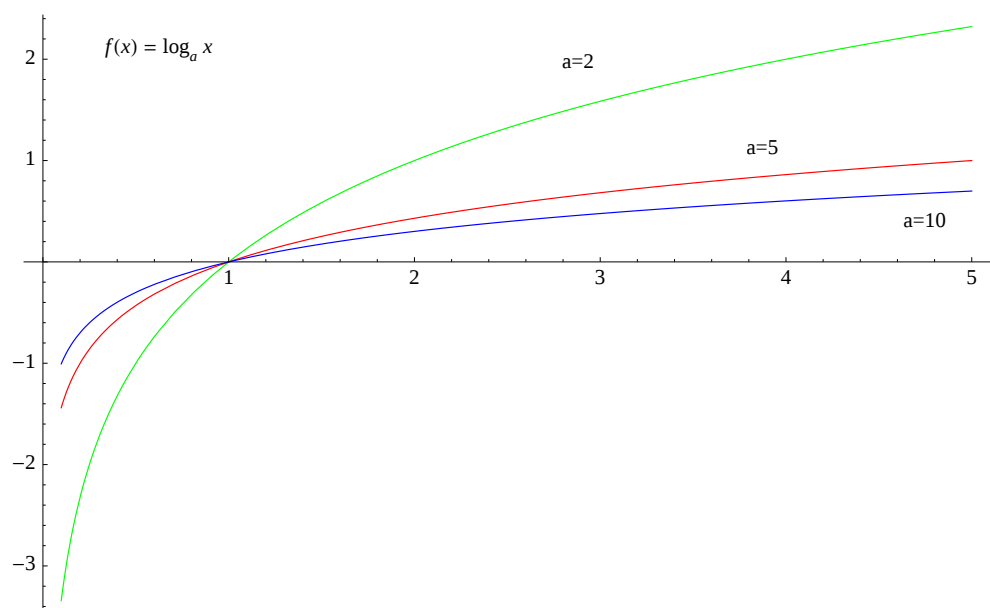
Własności:

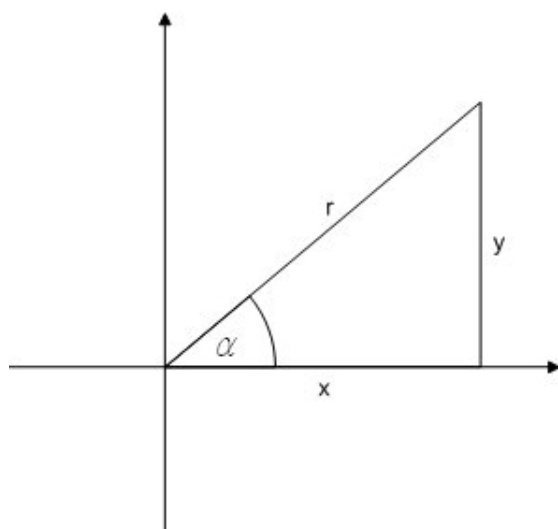
- $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$
- $\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}$

1.4 Funkcje trygonometryczne

Funkcjami trygonometrycznymi nazywamy funkcje: $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$. Funkcje trygonometryczne dla trójkąta przedstawionego na powyższym rysunku zdefiniowane są jako:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{y}{r} \\ \cos \alpha &= \frac{x}{r} \\ \tan \alpha &= \frac{y}{x} \\ \cot \alpha &= \frac{x}{y} = \frac{1}{\tan \alpha} \end{aligned} \tag{1.2}$$

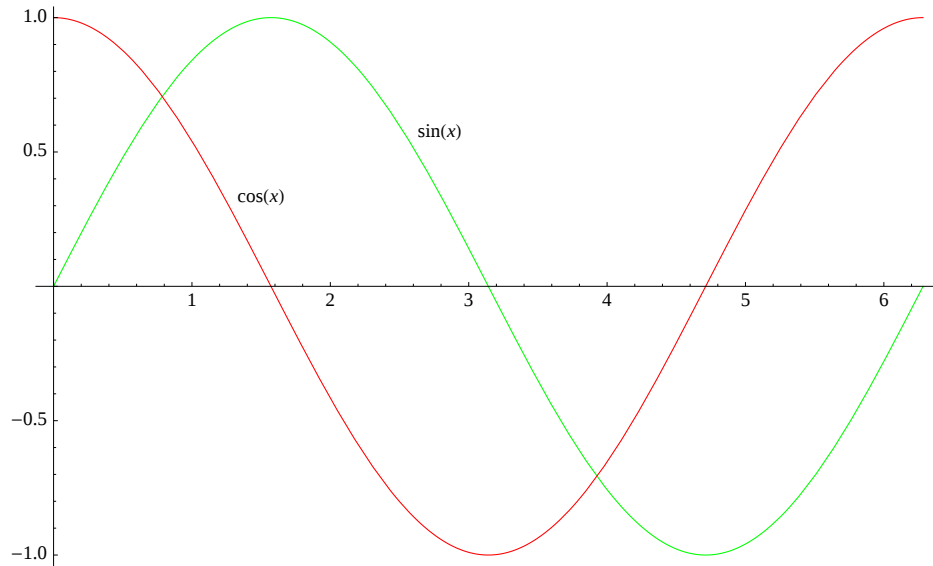




α	$0(0^\circ)$	$\frac{\pi}{6}(30^\circ)$	$\frac{\pi}{4}(45^\circ)$	$\frac{\pi}{3}(60^\circ)$	$\frac{\pi}{2}(90^\circ)$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Nie istnieje
$\operatorname{ctg} \alpha$	Nie istnieje	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Wartości funkcji trygonometrycznych dla „podstawowych” kątów przedstawione są w poniższej tabeli.

Funkcje sinus i cosinus są określone na całej dziedzinie liczb rzeczywistych. Są okresowe i ograniczone. Funkcja sinus jest nieparzysta, natomiast cosinus jest przysty. Funkcja tangens i

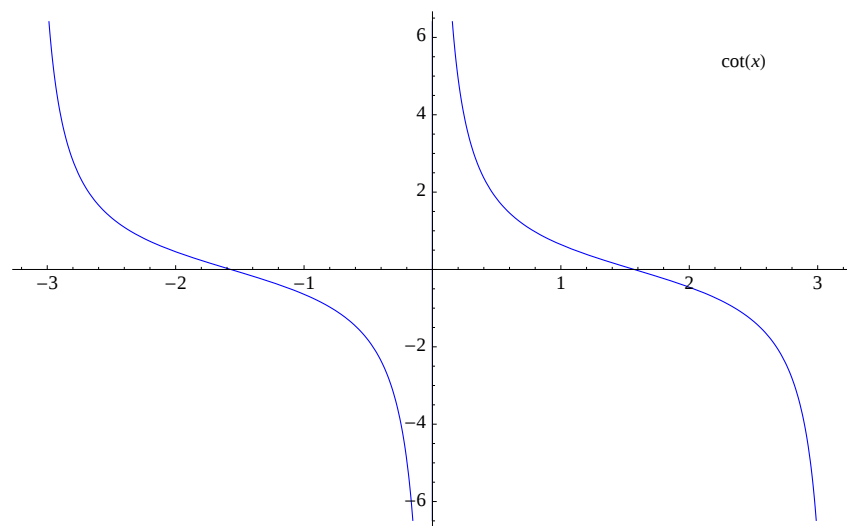
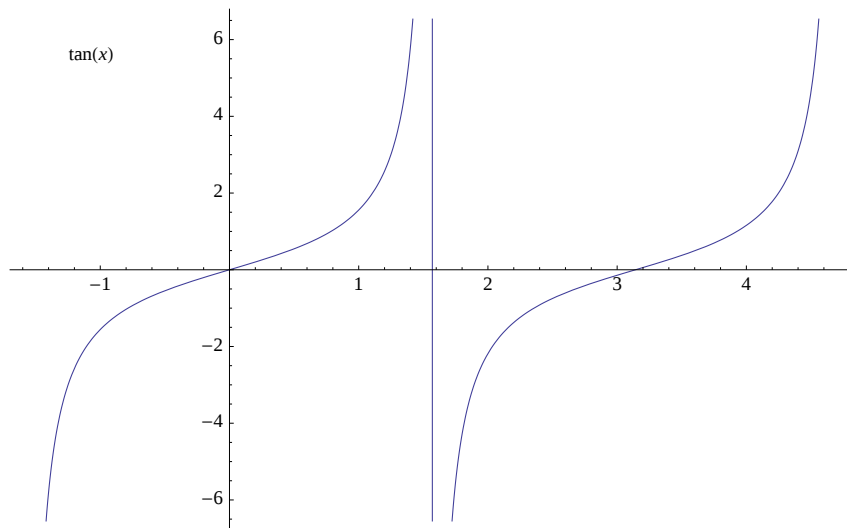


cotangens nie są określone na całej dziedzinie. Dla tangensa jest to $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$, natomiast dziedzina cotangensa to: $D_{\cot} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

Funkcje tangens i cotangens określone są przy użyciu funkcji sinus i cosinus. Funkcja tangens jest rosnąca w każdym przedziale swojej dziedziny i jest nieparzysta. Funkcja cotangens jest malejąca w każdym przedziale swojej dziedziny i jest parzysta. Obie funkcje są okresowe, o okresie π .

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \cot \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\end{aligned}$$

Tożsamości trygonometryczne:



$$\begin{aligned}
\sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\
\sin(x + y) &= \sin x \cos y + \sin y \cos x \\
\cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\
\sin(x - y) &= \sin x \cos y - \sin y \cos x \\
\cos(x - y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \\
\sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\
\sin x - \sin y &= 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} \\
\cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\
\cos x - \cos y &= -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}
\end{aligned}$$

1.5 Funkcje cyklometryczne

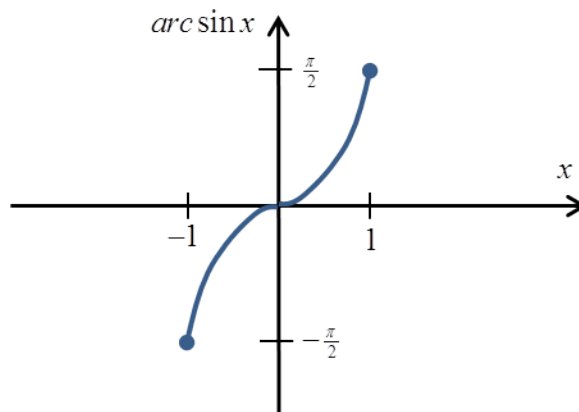
Funkcje cyklometryczne (funkcje kołowe) to funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych.

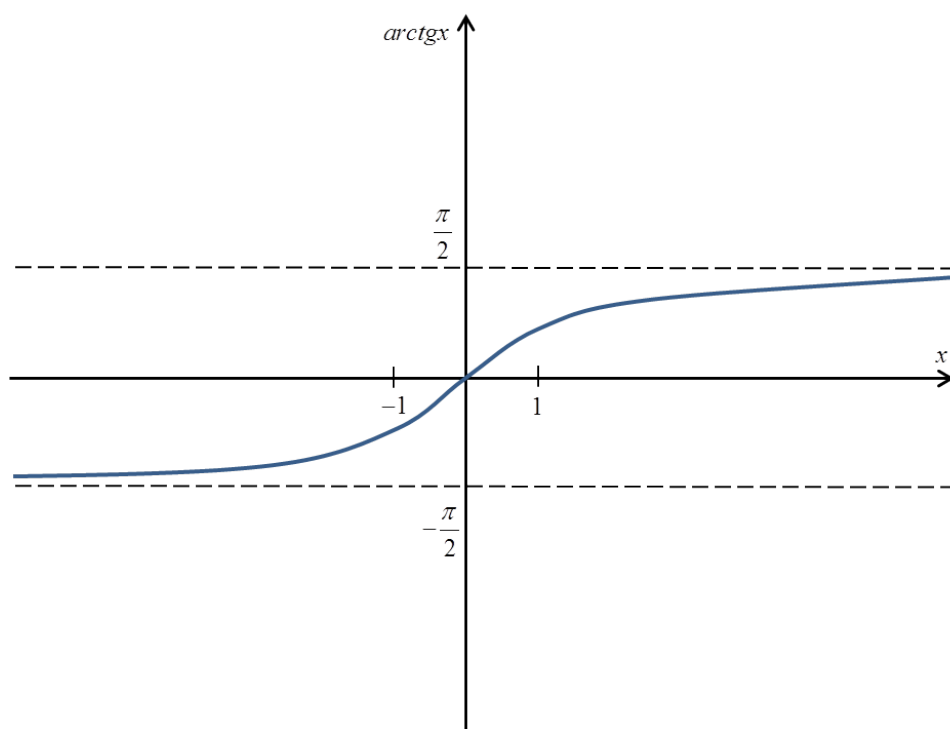
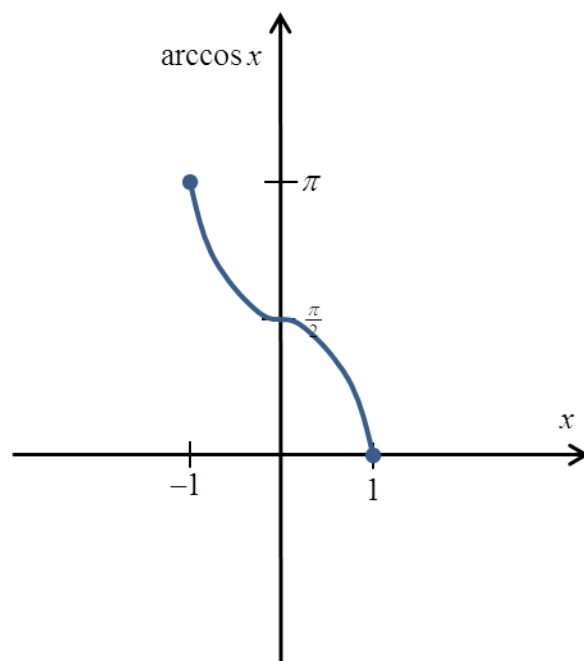
Funkcja arcus sinus, $\arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

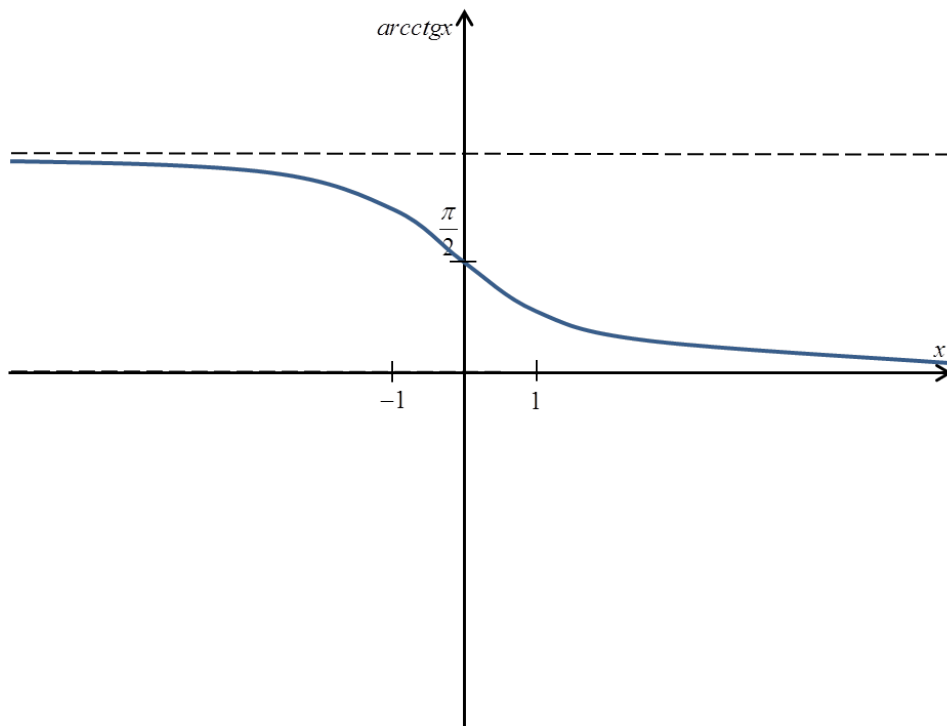
Funkcja arcus cosinus $\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$.

Funkcja arcus tangens $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Funkcja arcus cotangens $\operatorname{arctg}: \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$.







1.6 Zadania z funkcji elementarnych

Zadanie 1. Oblicz pierwiastki funkcji.

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 1 \quad (1.3)$$

Liczymy Δ . Delta dla trójmianu kwadratowego postaci $ax^2 + bx + c$ wyraża się wzorem

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad (1.4)$$

Miejsca zerowe funkcji oblicza się podług

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad (1.5)$$

W naszym przykładzie $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1$, więc pierwiastkami są

$$x_1 = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{4}{4} = 1, \quad x_2 = \frac{-(-3) - 1}{4} = \frac{1}{2} \quad (1.6)$$

Zadanie 2. Oblicz

$$\log_{\sqrt{3}} 8 \cdot \log_4 81 = \quad (1.7)$$

$$\log_9 5 \cdot \log_{25} 27 = \quad (1.8)$$

$$4^{\log_2 5} = \quad (1.9)$$

$$3^{\log_5 5 + \log_5 2} = \quad (1.10)$$

Pierwsze zadanie jak i drugie rozwiązujemy poprzez zamianę podstawy, czyli korzystamy z wzoru:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (1.11)$$

W pierwszym mamy:

$$\log_{\sqrt{3}} 8 \cdot \log_4 81 = \frac{\log_2 8}{\log_2 \sqrt{3}} \cdot \frac{\log_2 81}{\log_2 4} = \frac{\log_2 2^3}{\log_2 3^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\log_2 3^4}{\log_2 2^2} = \frac{3 \overbrace{\log_2 2}^{=1} 4 \underbrace{\log_2 3}_{=1}}{\frac{1}{2} \log_2 3 \cdot 2 \log_2 2} = 12 \quad (1.12)$$

Drugie zadanie robimy analogicznie

$$\log_9 5 \cdot \log_{25} 27 = \frac{\log_3 5}{\log_3 9} \cdot \frac{\log_3 27}{\log_3 25} = \frac{\log_3 5}{\log_3 3^2} \cdot \frac{\log_3 3^3}{\log_3 5^2} = \frac{\log_3 5}{2 \underbrace{\log_3 3}_{=1}} \cdot \frac{3 \overbrace{\log_3 3}^{=1}}{2 \log_3 5} = \frac{3}{4} \quad (1.13)$$

Trzeci i czwarty przykład bazuje wyłącznie na definicji logarytmu.

$$4^{\log_2 5} = (2^2)^{\log_2 5} = 2^{\log_2 5^2} = 5^2 = 25 \quad (1.14)$$

$$3^{\log_5 5 + \log_5 2} = 3^{\log_3 10} = 10 \quad (1.15)$$

Skorzystano z własności logarytmu $\log_a b + \log_a c = \log_a(bc)$.

Zadanie 3. Rozwiąż równanie

$$\begin{aligned} \log_2(x-1) &= 3 \\ \log_3^2 x - \log_3 x^3 - 2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.16)$$

Pierwsze równanie rozwiązujemy poprzez sprowadzenie prawej strony do postaci logarytmicznej i korzystamy z faktu, że logarytm jest funkcją różnowartościową. (Trzeba tutaj nadać założenia na x , tzn. $x-1 \geq 0$).

$$\log_2(x-1) = 3 = \log_2 8 \quad (1.17)$$

dlatego $x-1 = 8$, to $x = 9$

Drugie równanie traktujemy jak równanie kwadratowe postaci

$$t^2 - 3t - 2 = 0 \quad (1.18)$$

gdzie $t = \log_3 x$ i szukamy rozwiązania tego równania. Więc liczymy deltę $\Delta_t = 9 - 8 = 1$. To miejsca zerowe są dane przez

$$t_1 = \frac{3-1}{2} = 1, \quad t_2 = \frac{3+1}{2} = 2 \quad (1.19)$$

Mamy obecnie do rozwiązania dwa równania $\log_3 x = 1$ lub $\log_3 x = 2$, z jednego wynika, że $x = 3$, z drugiego $x = 9$. Oba wyniki należą do dziedziny.

Zadanie 4. Wiedząc, że $\cos x_0 = -\frac{3}{4}$ i $x_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ oblicz $\sin x_0$, $\tan x_0$, $\cot x_0$. Korzystamy z jedynki trygonometrycznej, żeby policzyć sinus.

$$\sin^2 x_0 + (-\frac{3}{4})^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 x_0 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16} \quad (1.20)$$

Więc $\sin x_0 = \frac{\sqrt{7}}{4}$ lub $\sin x_0 = -\frac{\sqrt{7}}{4}$. Ponieważ sinus jest funkcją dodatnią w drugiej ćwiartce, tzn. w przedziale $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, więc odrzucamy drugą opcję. Mając sinus obliczony, wystarczy skorzystać z definicji tangensa i cotangensa, żeby wyznaczyć wartości tych funkcji.

$$\tan x_0 = \frac{\sin x_0}{\cos x_0} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{-\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{7}}{3} \quad (1.21)$$

natomiast cotangens jest odwrotnością tangensa

$$\cot x_0 = -\frac{3}{\sqrt{7}} \quad (1.22)$$

Zadanie 5. Przedstaw tożsamości trygonometryczne:

- $\tan(x + y)$
- $\cot(x + y)$

$$\tan(x + y) = \frac{\sin(x + y)}{\cos(x + y)} = \frac{\sin x \cos y + \sin y \cos x}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} \quad (1.23)$$

podzielmy licznik i mianownik przez $\cos x \cos y$, otrzymamy wtedy

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \quad (1.24)$$

Analogicznie postępujemy w przypadku cotangensa

$$\cot(x + y) = \frac{\cos x \cos y - \sin x \sin y}{\sin x \cos y + \sin y \cos x} = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot y + \cot x} \quad (1.25)$$

tym razem pomnożyliśmy i podzieliliśmy licznik i mianownik przez $\sin x \sin y$

Zadanie 6. Ile wynosi $\tan 2x$?

Podstawiamy do wcześniej otrzymanego wzoru $y = x$:

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \quad (1.26)$$

Zadanie 7. Oblicz $\sin(\frac{5}{4}\pi - 1) + \sin(\frac{3}{4}\pi + 1)$.

Należy skorzystać z wzoru na sumę sinusów

$$\sin(\frac{5}{4}\pi - 1) + \sin(\frac{3}{4}\pi + 1) = 2 \underbrace{\sin \frac{\frac{5}{4}\pi + 1 + \frac{3}{4}\pi - 1}{2}}_{\sin \pi = 0} \cos \frac{\frac{5}{4}\pi - 1 - \frac{3}{4}\pi + 1}{2} = 0 \quad (1.27)$$

Zadanie 8. Wykazać, że

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad (1.28)$$

Wskazówka: Wykorzystać wzór $\sin \alpha = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$, w którym należy przyjąć $\alpha = \arcsin x$.

Rozwiązanie:

$$\alpha = \arcsin x \Leftrightarrow \sin \alpha = x \quad (1.29)$$

$x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Mamy więc $\sin \alpha = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ czyli $x = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$.

Jeżeli $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ to $0 \leq \frac{\pi}{2} - \alpha \leq \pi$. Ze względu na określenie α mamy

$$x = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) \wedge 0 \leq \frac{\pi}{2} - \alpha \leq \pi \Leftrightarrow \arccos x = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad (1.30)$$

Ponieważ $\alpha = \arcsin x$ stąd zachodzi nasza tożsamość.

Zadanie 9. Wykazać, że

$$\arcsin x = \arccos \sqrt{1 - x^2} \quad (1.31)$$

dla $x \in [0, 1]$. Wskazówka:

Wykorzystać jedynekę trygonometryczną i przyjąć $\alpha = \arcsin x$.

Rozwiązanie:

$$\alpha = \arcsin x \Leftrightarrow \sin \alpha = x, \quad \alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \quad (1.32)$$

czyli mamy

$$x^2 + \cos^2 \alpha = 1 \quad (1.33)$$

czyli $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - x^2}$, zostawiamy plus, ponieważ $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Jeżeli $x \in [0, 1]$ to $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Mamy teraz

$$\sqrt{1 - x^2} = \cos \alpha \wedge \alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \wedge \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}] \Leftrightarrow \arccos \sqrt{1 - x^2} = \alpha \wedge \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad (1.34)$$

stąd

$$\arcsin x = \arccos \sqrt{1 - x^2} \wedge x \in [0, 1] \quad (1.35)$$

Zadanie 10. Ile wynosi $\sin(\arccos x)$?

Podnosimy do kwadratu i dodajemy cosinus tego samego argumentu, żeby skorzystać z jedynki trygonometrycznej.

$$\sin^2(\arccos x) + \underbrace{\cos^2(\arccos x)}_{=x^2} = 1 \quad (1.36)$$

więc

$$\sin^2(\arccos x) = 1 - x^2 \Leftrightarrow \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2} \quad (1.37)$$

Zadanie 11. Ile wynosi $\sin(\arctan x)$?

Ponieważ tangens z arcusa tangensa wynosi x , czyli

$$\tan(\arctan x) = x = \frac{\sin(\arctan x)}{\cos(\arctan x)} = \frac{\sin(\arctan x)}{\sqrt{1 - \sin^2(\arctan x)}} = x \quad (1.38)$$

więc

$$x^2 = \frac{\sin^2(\arctan x)}{1 - \sin^2(\arctan x)} \Leftrightarrow \sin^2(\arctan x) = x^2 - x^2 \sin^2(\arctan x) \quad (1.39)$$

stąd

$$\sin^2(\arctan x)(1 + x^2) = x^2 \Leftrightarrow \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \quad (1.40)$$