1 Całki funkcji wymiernych

Definicja 1. Funkcją wymierną nazywamy iloraz dwóch wielomianów. Całka funkcji wymiernej jest więc postaci:

$$\int \frac{W_1(x)}{W_2(x)}\mathrm{d}x = \int \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}\mathrm{d}x \tag{1.1}$$

Jak sobie poradzić z rozwiązaniem takiej całki?

- Sprawdzamy czy $n \geqslant m$, czyli czy stopień wielomianu w liczniku jest większy od stopnia wielomianu w mianowniku. Jeżeli tak jest to dzielimy licznik przez mianownik. Następnie przedstawiamy funkcję podcałkową jako sumę wielomianu oraz funkcji wymiernej, której stopień licznika jest już mniejszy od stopnia mianownika, tzn. $n < m$.

- Jeżeli $n < m$, to sprawdzamy czy licznik nie jest pochodną mianownika, jeśli tak jest to:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C \tag{1.2}$$

- Jeżeli $n < m$ i licznik nie jest pochodną mianownika, to funkcję podcałkową rozkładamy na tzw. ułamki proste, tj. na wyrażenia postaci:

$$\frac{A}{(ax+b)^k} \quad \text{oraz} \quad \frac{Bx+C}{(cx^2+dx+e)^p} \tag{1.3}$$

gdzie A, B, C, a, b, c, d, e są stałe, przy czym $d^2 - 4ec < 0$ (delta mianownika jest ujemna dla drugiego przypadku), oraz k i p są liczbami naturalnymi.

1.1 Gdy mianownik jest stopnia drugiego

1.1.1 Rozkładanie na ułamki proste. Jeżeli $\Delta > 0$.

Przykład 1.

$$\frac{1}{x^2+5x+4} \tag{1.4}$$

$\Delta = 25 - 16 = 9 = 3^2$ i miejsca zerowe to

$$x_1 = \frac{-5+3}{2} = -1 \quad , \quad x_2 = \frac{-5-3}{2} = -4 \tag{1.5}$$

czyli $x^2 + 5x + 4 = (x+1)(x+4)$ przedstawiamy nasz ułamek w postaci

$$\frac{1}{x^2+5x+4} = \frac{1}{(x+1)(x+4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+4} \tag{1.6}$$

staramy się teraz znaleźć współczynniki A i B, dlatego mnożymy obie strony przez $(x+1)(x+4)$ co nam daje równość

$$1 = A(x+4) + B(x+1) = x(A+B) + (4A+B) \tag{1.7}$$

daje nam to układ równań

$$A + B = 0 \tag{1.8}$$

$$4A + B = 1 \tag{1.9}$$

więc $A = -B$ i $3A = 1$ czyli $A = \frac{1}{3}$ więc $B = -\frac{1}{3}$. Zależność ta jest spełniona dla każdego x. Stąd całki nasze przyjmują postać

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+5x+4} = \int \frac{\frac{1}{3}\mathrm{d}x}{x+1} + \int \frac{-\frac{1}{3}\mathrm{d}x}{x+4} \tag{1.10}$$

robiąc podstawienie $t = (x+1)$ i $t = x+4$ w kolejnych całkach otrzymamy rezultat

$$\frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{3}\ln|t| + C = \frac{1}{3}\ln|x+1| + C \tag{1.11}$$

natomiast druga całka

$$-\frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\frac{1}{3}\ln|t| + C = -\frac{1}{3}\ln|x+4| + C \tag{1.12}$$

Przykład 2.

$$\frac{2x-3}{3x^2-5x+2} \tag{1.13}$$

Δ mianownika wynosi $\Delta = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1$, natomiast miejsca zerowe

$$x_1 = \frac{5+1}{6} = 1 \quad , \quad x_2 = \frac{5-1}{6} = \frac{2}{3} \tag{1.14}$$

nasz wielomian można przedstawić w postaci

$$\frac{2x-3}{3x^2-5x+2} = \frac{2x-3}{(x-1)(3x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{3x-2} \tag{1.15}$$

analogicznie mnożymy obie strony przez $(x-1)(3x-2)$ czyli dostaniemy wyrażenie

$$2x-3 = A(3x-2) + B(x-1) = x(3A+B) - 2A - B \tag{1.16}$$

daje nam to układ równań

$$3A + B = 2 \tag{1.17}$$

$$2A + B = 3 \tag{1.18}$$

więc $A = -1$ (odjęcie drugiego równania od pierwszego). Wstawienie takiego A daje nam, że $B = 5$. Czyli całka

$$\frac{2x-3}{3x^2-5x+2} = \frac{-1}{x-1} + \frac{5}{3x-2} \tag{1.19}$$

całkując prawą stronę i wykorzystując podstawienie typu $t = x - 1$ dla pierwszego członu i $t = 3x - 2$ dla drugiego otrzymujemy

$$\int \frac{-\mathrm{d}x}{x-1} = \int \frac{-\mathrm{d}t}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|x-1| + C \tag{1.20}$$

oraz

$$\int \frac{5\mathrm{d}x}{3x-2} = 5\frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{5}{3}\ln|t| + C = \frac{5}{3}\ln|3x-2| + C \tag{1.21}$$

Zadanie 1. Oblicz całki

$$\int \frac{3\mathrm{d}x}{2x-1} = \tag{1.22}$$

$$\int \frac{4x-3}{2x^2-3x-19}\mathrm{d}x = \tag{1.23}$$

$$\int \frac{x-1}{3x^2-6x+2}\mathrm{d}x = \tag{1.24}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2+3x-2} = \tag{1.25}$$

$$\int \frac{x\mathrm{d}x}{2x^2-3x-2} = \tag{1.26}$$

$$\int \frac{4x+9}{x^2+3x-10}\mathrm{d}x = \tag{1.27}$$

W całce (1.22) wystarczy dokonać podstawienia $2x - 1 = t$, więc $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}t$, czyli

$$\int \frac{3\mathrm{d}x}{2x-1} = \frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{3}{2}\ln|t| + C = \frac{3}{2}\ln|2x-1| + C \tag{1.28}$$

Łatwo zauważyć, że w tym przykładzie licznik jest pochodną mianownika, tzn. $(2x^2-3x-19)' = 4x - 3$, więc jest to całka z funkcji typu

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C \tag{1.29}$$

czyli

$$\int \frac{4x-3}{2x^2-3x-19}\mathrm{d}x = \ln|2x^2-3x-19| + C \tag{1.30}$$

W następnym przypadku (1.24) również liczymy pochodną mianownika, która wynosi $(3x^2 - 6x + 2)' = 6x - 6$, jeżeli podzielimy tę pochodną przez 6, to dostaniemy to samo co jest w liczniku, więc licznik można zapisać jako $\frac{1}{6}(6x - 6)$. Stąd całka nasza wygląda:

$$\int \frac{x-1}{3x^2-6x+2}\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int \frac{6x-6}{3x^2-6x+2}\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\ln|3x^2-6x+2| + C \tag{1.31}$$

W przykładzie (1.25) będziemy musieli rozłożyć nasze wyrażenie na ułamki proste. Pierwszym krokiem jest policzenie delty i miejsc zerowy dwumianu kwadratowego znajdującego się w mianowniku, czyli $\Delta = 9 + 16 = 25$, stąd

$$x_1 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{-3-5}{4} = -2 \tag{1.32}$$

Nasz mianownik zapiszemy teraz

$$2x^2 + 3x + 1 = 2(x - \frac{1}{2})(x+2) = (2x-1)(x+2) \tag{1.33}$$

teraz rozkładamy wyrażenie podcałkowe na ułamki proste

$$\frac{1}{2x^2+3x+1} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x+2} \tag{1.34}$$

Mnożąc obie strony przez $(2-1)(x+2)$ otrzymujemy układ równań

$$A + 2B = 0 \tag{1.35}$$
$$2A - B = 1 \tag{1.36}$$

czyli $B = -\frac{1}{5}$ i $A = \frac{2}{5}$, więc mamy styczność z całkami, które już łatwo wyliczyć

$$\frac{2}{5}\int \frac{\mathrm{d}x}{2x-1} = \frac{1}{5}\ln|2x-1| + C \tag{1.37}$$

gdzie zastosowaliśmy podstawienie $2x - 1 = t$ i $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}t$, natomiast druga całka wynosi

$$-\frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+2} = -\frac{1}{5}\ln|x+2| + C \tag{1.38}$$

ostatecznie wynik wynosi

$$\int \frac{1}{2x^2+3x+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\ln|2x-1| - \frac{1}{5}\ln|x+2| + C = \frac{1}{5}\ln|\frac{2x-1}{x+2}| + C \tag{1.39}$$

Zadanie (1.26) wykonujemy analogicznie z tą różnicą, że nasz układ równań się zmieni, tzn.

$$\frac{x}{2x^2+3x+1} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x+2} \tag{1.40}$$

więc

$$A + 2B = 1 \tag{1.41}$$
$$2A - B = 0 \tag{1.42}$$

więc $A = \frac{1}{5}$ i $B = \frac{2}{5}$, stąd

$$\frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}x}{2x-1} = \frac{1}{10}\ln|2x-1| + C \tag{1.43}$$

oraz

$$\frac{2}{5}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+2} = \frac{2}{5}\ln|x+2| + C \tag{1.44}$$

czyli całka

$$\int \frac{x}{2x^2+3x+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{10}\ln|2x-1| + \frac{2}{5}\ln|x+2| + C \tag{1.45}$$

Zadanie (1.27). Liczymy pochodną mianownika, która wynosi: $(x^2+3x-10)' = 2x+3$, czyli naszą całkę przedstawimy jako

$$\int \frac{4x+9}{x^2+3x-10}\mathrm{d}x = \int \frac{4x+6}{x^2+3x-10}\mathrm{d}x + 3\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+3x-10} \tag{1.46}$$

pierwsza całka to dwukrotność pochodnej mianownika, więc

$$\int \frac{4x+6}{x^2+3x-10}\mathrm{d}x = 2\int \frac{2x+3}{x^2+3x-10}\mathrm{d}x = 2\ln|x^2+3x-10| + C \tag{1.47}$$

natomiast drugą całkę rozkładamy na ułamki proste. Licząc deltę otrzymamy: $\Delta = 9+40 = 49$, więc

$$x_1 = \frac{-3+7}{2} = 2 \quad , \quad x_2 = \frac{-3-7}{2} = -5 \tag{1.48}$$

stąd

$$\frac{3}{x^2+3x-10} = \frac{3}{(x-2)(x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5} \tag{1.49}$$

więc po wymnożeniu obu stron przez $(x-2)(x+5)$ mamy

$$A + B = 0 \tag{1.50}$$
$$5A - 2B = 3 \tag{1.51}$$

czyli $A = -B$ i $A = 1$, dlatego całka wynosi

$$\int \frac{3\mathrm{d}x}{x^2+3x-10} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x-2} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x+5} = \ln|x-2| - \ln|x+5| + C \tag{1.52}$$

wynik końcowy to

$$\int \frac{4x+9}{x^2+3x-10}\mathrm{d}x = 2\ln|x^2+3x-10| + \ln|x-2| - \ln|x+5| + C \tag{1.53}$$

1.1.2 W mianowniku $\Delta = 0$

Przykład 1. Wyrażenie pod całką będzie postaci:

$$\frac{1}{9x^2 - 12x + 4} \tag{1.54}$$

Rzeczywiście można łatwo zauważyć, że mianownik da się zapisać w postaci

$$9x^2 - 12x + 4 = (3x - 2)^2 \tag{1.55}$$

więc w całce wykonujemy podstawienie $t = 3x - 2$, czyli $\mathrm{d}t = 3\mathrm{d}x$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(3x-2)^2} = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -\frac{1}{3}t^{-1} + C = -\frac{1}{3}(3x-2)^{-1} + C \tag{1.56}$$

Przykład 2. Jeżeli w licznik będziemy mieli jakąś zależność od x.

$$\frac{x}{9x^2 - 12x + 4} = \frac{x}{(3x-2)^2} = \frac{A}{(3x-2)^2} + \frac{B}{3x-2} \tag{1.57}$$

W powyższej linijce mamy już rozłożenie na ułamki proste. Mnożymy obie strony przez wyrażenie $(3x-2)^2$ co nas doprowadzi do

$$x = A + B(3x-2) = 3Bx + A - 2B \tag{1.58}$$

mamy układ równań, z którego wynika, że $B = \frac{1}{3}$, więc $A = \frac{2}{3}$. Licząc teraz całki

$$\int \frac{\frac{2}{3}\mathrm{d}x}{(3x-2)^2} + \int \frac{\frac{1}{3}\mathrm{d}x}{3x-2} \tag{1.59}$$

pierwsza całka została już wcześniej policzona, natomiast w drugiej należy wykonać podstawienie $t = 3x - 2$, co nas doprowadzi do jakiegoś logarytmu

$$\int \frac{\frac{2}{3}\mathrm{d}x}{(3x-2)^2} + \int \frac{\frac{1}{3}\mathrm{d}x}{3x-2} = -\frac{2}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{3x-2} + \frac{1}{3}\frac{1}{3}\ln|3x-2| + C \tag{1.60}$$

Zadanie 2. Oblicz całki

$$\int \frac{2\mathrm{d}x}{9x^2 - 6x + 1} = \tag{1.61}$$

$$\int \frac{-5\mathrm{d}x}{3x^2 - \sqrt{24}x + 2} = \tag{1.62}$$

$$\int \frac{3x\mathrm{d}x}{(x-7)^2} = \tag{1.63}$$

$$\int \frac{2x-4}{(x-2)^2}\mathrm{d}x = \tag{1.64}$$

Pierwszą całkę można zapisać w postaci

$$\int \frac{2\mathrm{d}x}{9x^2 - 6x + 1} = 2\int \frac{\mathrm{d}x}{(3x-1)^2} \tag{1.65}$$

wykonując podstawienie za to co się znajduje w mianowniku, czyli $3x - 1 = t$, to $\frac{1}{3}\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$, więc

$$\frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -\frac{2}{3}\frac{1}{t} + C = -\frac{2}{3}\frac{1}{3x-1} + C \tag{1.66}$$

W całce (1.62) można policzyć deltę, lub zauważyć, że drugi wyraz (czyli współczynnik stojący przy x) da się zapisać jako $\sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 3 \cdot 2} = 2\sqrt{3}\sqrt{2}$, więc nasze wyrażenie da się przedstawić jako

$$\int \frac{-5\mathrm{d}x}{3x^2 - \sqrt{24}x + 2} = -5\int \frac{\mathrm{d}x}{(\sqrt{3}x - \sqrt{2})^2} = -\frac{5}{\sqrt{3}}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{5}{\sqrt{3}}\frac{1}{t} + C = \frac{5\sqrt{3}}{3}\frac{1}{\sqrt{3}x - \sqrt{2}} + C \tag{1.67}$$

Zadanie (1.63) musimy rozłożyć na ułamki proste, czyli przedstawiamy wyrażenie podcałkowe jako

$$\frac{3x}{(x-7)^2} = \frac{A}{(x-7)^2} + \frac{B}{x-7} \tag{1.68}$$

mnożąc obie strony przez $(x-7)^2$ otrzymujemy równanie

$$3x = A + Bx - 7B \tag{1.69}$$

stąd wnioskujemy, że $B = 3$ i $A = -21$, więc

$$\int \frac{3x}{(x-7)^2}\mathrm{d}x = -21\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-7)^2} + 3\frac{\mathrm{d}x}{x-7} = 21\frac{1}{x-7} + 3\ln|x-7| + C \tag{1.70}$$

Z następnym zadaniem można postąpić analogicznie, lecz bystre oko dostrzeże, że licznik jest pochodną mianownika, więc całka (1.64)

$$\int \frac{2x-4}{(x-2)^2}\mathrm{d}x = 2\int \frac{x-2}{(x-2)^2}\mathrm{d}x = 2\ln|x-1| + C \tag{1.71}$$

1.1.3 W mianowniku $\Delta < 0$

Rozważmy najpierw całki typu

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+k)^2 + b} \tag{1.72}$$

wykonujemy podstawienie $x + k = \sqrt{b}t$ czyli $\mathrm{d}x = \sqrt{b}\mathrm{d}t$

$$\int \frac{\sqrt{b}\mathrm{d}t}{bt^2 + b} = \frac{\sqrt{b}}{b}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{1}{\sqrt{b}}\arctan t + C = \frac{1}{\sqrt{b}}\arctan\frac{x+k}{\sqrt{b}} + C \tag{1.73}$$

Do tego typu całek można doprowadzić każde wyrażenie, które w mianowniku ma $ax^2 + bx + c$ i delta jest ujemna. Jest to tzw. postać kanoniczna równania kwadratowego

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right] \tag{1.74}$$

Przykład 1. Weźmy teraz przykład

$$\int \frac{x+1}{2x^2+6x+5}\mathrm{d}x \tag{1.75}$$

Delta mianownika wynosi: $\Delta = 26 - 40 = -4 < 0$. Obliczmy teraz pochodną mianownika

$$(2x^2 + 6x + 5)' = 4x + 6 \tag{1.76}$$

dzieląc licznik przez pochodną mianownika otrzymujemy

$$x + 1 = \frac{1}{4}(4x + 6) - \frac{1}{2} \tag{1.77}$$

stąd nasza całka

$$\int \frac{x+1}{2x^2+6x+5}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{4x+6}{2x^2+6x+5}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2+6x+5} \tag{1.78}$$

pierwsza całka to oczywiście

$$\frac{1}{4}\int \frac{4x+6}{2x^2+6x+5}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln|2x^2+6x+5| + C \tag{1.79}$$

natomiast z drugą sprowadzamy do postaci kanonicznej, która wygląda $2(x+\frac{3}{2})^2+\frac{1}{4}$, wykonując podstawienie $x + \frac{3}{2} = \sqrt{\frac{1}{4}}t$, czyli $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}t$, mamy

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2+6x+5} = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{2}\mathrm{d}t}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}t^2} = \arctan t + C = \arctan(2x+3) + C \tag{1.80}$$

łącząc oba wyniki mamy

$$\int \frac{x+1}{2x^2+6x+5}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln|2x^2+6x+5| - \frac{1}{2}\arctan(2x+3) + C \tag{1.81}$$

Zadanie 3. Oblicz całki

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x-\frac{1}{2})^2+4} \tag{1.82}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{3x^2+2x+1} = \tag{1.83}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2-x+3} = \tag{1.84}$$

$$\int \frac{2x-3}{x^2+x+1} = \tag{1.85}$$

W pierwszym przykładzie (1.82) stosujemy proste podstawienie $2x-\frac{1}{2}=\sqrt{4}t=2t$,więc $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$, dlatego

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x-\frac{1}{2})^2+4}=\int \frac{\mathrm{d}t}{4t^2+4}=\frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}=\frac{1}{4}\arctan t+C=\frac{1}{4}\arctan(x-\frac{1}{4})+C \tag{1.86}$$

W całce (1.83) obliczamy deltę $\Delta=4-12=-8<0$. Ponieważ delta jest ujemna doprowadzamy nasze wyrażenie do postaci kanonicznej. Można podstawić do wzoru, lub obliczyć przy pomocy sposobu

$$ax^2+bx+c=a\Big((x-p)^2+q\Big) \tag{1.87}$$

wstawiając nasze wyrażenie i rozwijając wyrażenie $(x-p)^2$ mamy

$$3x^2+2x+1=3(x^2-2px+p^2+q) \tag{1.88}$$

możemy się z tego równania pozbyć x^2, wtedy mamy

$$2x+1=-6px+3p^2+3q \tag{1.89}$$

stąd wynika, że $2x=-6px$, czyli $p=-\frac{1}{3}$, wstawiając do części nie zawierającej x, tzn. do $1=3p^2+3q$, wyznaczymy wartość q

$$1=3\frac{1}{9}+3q\Rightarrow 3q=\frac{2}{3}\Rightarrow q=\frac{2}{9} \tag{1.90}$$

dlatego nasz mianownik można zapisać w postaci:

$$3x^2+2x+1=3\Big((x+\frac{1}{3})^2+\frac{2}{9}\Big) \tag{1.91}$$

stosujemy teraz podstawienie $x+\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{2}}{3}t$, czyli $\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{3}\mathrm{d}t$, więc

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{3x^2+2x+1}=\frac{\sqrt{2}}{3}\frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{\frac{2}{9}t^2+\frac{2}{9}}=\frac{\sqrt{2}}{9}\frac{9}{2}\arctan t+C=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\frac{3x+1}{\sqrt{2}})+C \tag{1.92}$$

Zadanie (1.84)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2-x+3} \tag{1.93}$$

postępujemy analogicznie. Liczymy deltę $\Delta=1-12=-11<0$. Przedstawiamy mianownik w postaci kanonicznej

$$2x^2-x+3=2\Big(x^2-2px+p^2+q\Big) \tag{1.94}$$

czyli $-2px=-x$, więc $p=\frac{1}{2}$, wstawiając do wyrażenie $2p^2+2q=3$ mamy $2q=\frac{5}{2}$ czyli $q=\frac{5}{4}$. Mianownik teraz przedstawimy w postaci:

$$2x^2-x+3=2\Big((x-\frac{1}{2})^2+\frac{5}{2}\Big) \tag{1.95}$$

robimy podstawienie $x - \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{5}{2}}t$, czyli $\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{5}{2}}\mathrm{d}t$. To całka sprowadza się do

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2 - x + 3} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{5}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\int \frac{\mathrm{d}t}{\frac{5}{2}t^2 + \frac{5}{2}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}\arctan t + C = \frac{2\sqrt{10}}{5}\arctan(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}(x - \frac{1}{2})) + C \tag{1.96}$$

W przykładzie (1.85)

$$\int \frac{2x - 3}{x^2 + x + 1}\mathrm{d}x \tag{1.97}$$

należy najpierw policzyć pochodną mianownika: $(x^2 + x + 1)' = 2x + 1$, więc ułamek podcałkowy można przedstawić jako

$$\int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}\mathrm{d}x - 4\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + x + 1} \tag{1.98}$$

pierwsza całka to

$$\int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}\mathrm{d}x = \ln|x^2 + x + 1| + C \tag{1.99}$$

natomiast drugą sprowadzamy do postaci kanonicznej $x^2 + x + 1 = x^2 - 2px + p^2 + q$, stąd wynika, że $p = -\frac{1}{2}$ czyli $q = \frac{3}{4}$. Dlatego postać kanoniczna to

$$x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \tag{1.100}$$

dokonując podstawienia $x + \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{3}{4}}t$ co nas prowadzi do $\sqrt{\frac{3}{4}}\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$ mamy

$$-4\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + x + 1} = -4\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\frac{3}{4}t^2 + \frac{3}{4}} = -\frac{8\sqrt{3}}{3}\arctan t + C = -\frac{8\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}(x + \frac{1}{2})\right) + C \tag{1.101}$$

Łącząc oba wyrażenia otrzymujemy ostatecznie

$$\int \frac{2x - 3}{x^2 + x + 1}\mathrm{d}x = \ln|x^2 + x + 1| + -\frac{8\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}(x + \frac{1}{2})\right) + C \tag{1.102}$$