1 Całki

Definicja 1. Funkcją pierwotną funkcji $f(x)$ w przedziale $a < x < b$ nazywamy każdą taką funkcję $F(x)$, której pochodna $F'(x)$ równa się danej funkcji $f(x)$ dla każdego x z przedziału $a < x < b$.

Definicja 2. Całką nieoznaczoną (nieokreśloną) funkcji $f(x)$, oznaczaną symbolem

$$\int f(x)\mathrm{d}x \tag{1.1}$$

nazywamy wyrażenie $F(x)+C$, gdzie $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, a C jest dowolną stałą. Więc

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C, \quad \mathrm{gdzie} F'(x) = f(x) \tag{1.2}$$

1.1 Podstawowe wzory rachunku całkowego

$$\int x^a \mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1 \tag{1.3}$$

więc dla $a = 0$

$$\int \mathrm{d}x = x + C \tag{1.4}$$

dla $a = -\frac{1}{2}$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C, \quad x > 0 \tag{1.5}$$

dla $x = -2$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\frac{1}{x} + C, \quad x \neq 0 \tag{1.6}$$

Dalej mamy wzory

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C, \quad x \neq 0 \tag{1.7}$$
$$\int e^x \mathrm{d}x = e^x \tag{1.8}$$
$$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C \tag{1.9}$$
$$\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C \tag{1.10}$$
$$\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C \tag{1.11}$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\cot x + C, \quad \sin x \neq 0 \tag{1.12}$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x + C, \quad \cos x \neq 0 \tag{1.13}$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C \tag{1.14}$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C = -\arctan x + C \tag{1.15}$$

1.2 Własności całek nieoznaczonych

Definicja 3. Całka sumy równa się sumie całek, tzn.

$$\int \Big(f(x) + g(x)\Big)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x \tag{1.16}$$

Definicja 4. Stały czynnik można wynieść przed znak całki, tzn.

$$\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x, \quad k \neq 0 \tag{1.17}$$

Zadanie 1. Oblicz całki:

$$\int (2x^3 - x^2 + 1)\mathrm{d}x = \tag{1.18}$$
$$\int (x^2 - x + 1)(x^3 + 2x - \sqrt{3})\mathrm{d}x = \tag{1.19}$$
$$\int \sqrt{x}\mathrm{d}x = \tag{1.20}$$
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \tag{1.21}$$
$$\int (\sin t + \frac{2}{3}t^3)\mathrm{d}t = \tag{1.22}$$

Zadanie (1.18) rozbijamy na 3 całki, więc

$$\int(2x^3 - x^2 + 1)\mathrm{d}x = \int 2x^3\mathrm{d}x + \int(-x^2)\mathrm{d}x + \int 1\mathrm{d}x = 2\int x^3\mathrm{d}x - \int x^2\mathrm{d}x + \int \mathrm{d}x \qquad (1.23)$$

skorzystaliśmy z własności, że można wyciągnąć stałą przed znak całki. Teraz wykorzystamy wzór (1.3) przy współczynnikach $a = 3,\ 2,\ 0$. Więc

$$2\int x^3\mathrm{d}x - \int x^2\mathrm{d}x + \int \mathrm{d}x = 2\cdot\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x + C = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x + C \qquad (1.24)$$

W następnym zadaniu (1.19) trzeba wymnożyć wyraz znajdujący się pod całką. Czyli

$$\begin{aligned}(x^2 - x + 1)(x^3 + 2x - \sqrt{3}) &= x^5 + 2x^3 - \sqrt{3}x^2 - x^4 - 2x^2 + \sqrt{3}x + x^3 + 2x - \sqrt{3} = \\ &= x^5 - x^4 + 3x^3 - x^2(2+\sqrt{3}) + 2x - \sqrt{3} \qquad (1.25)\end{aligned}$$

stąd mamy 6 całek

$$\begin{aligned}I_1 = \int x^5\mathrm{d}x &= \frac{1}{6}x^6 + C_1 \\ I_2 = -\int x^4\mathrm{d}x &= -\frac{1}{5}x^5 + C_2 \\ I_3 = 3\int x^3\mathrm{d}x &= \frac{3}{4}x^4 + C_3 \\ I_4 = -(2+\sqrt{3})\int x^2\mathrm{d}x &= -\frac{2+\sqrt{3}}{3}x^3 + C_4 \\ I_5 = 2\int x\mathrm{d}x &= \frac{2}{2}x^2 + C_5 = x^2 + C_5 \\ I_6 = -\sqrt{3}\int \mathrm{d}x &= -\sqrt{3}x + C_6 \qquad (1.26)\end{aligned}$$

Łącząc wszystkie wyrażenia razem (dodając je do siebie $\sum_{i=1}^{6} I_i$) otrzymujemy

$$\int(x^2 - x + 1)(x^3 + 2x - \sqrt{3})\mathrm{d}x = \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{3}{4}x^4 - \frac{2+\sqrt{3}}{3}x^3 + x^2 - \sqrt{3}x + C \qquad (1.27)$$

gdzie C jest stałą.
Następny przykład jest łatwym zastosowaniem reguły (1.3) przy $a = \frac{1}{2}$, czyli

$$\int \sqrt{x}\mathrm{d}x = \int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}} + C \qquad (1.28)$$

Przykład (1.21) jest znowu łatwym zastosowaniem poprzednio wykorzystywanych reguł, tym razem $y = -2$. Trzeba zwrócić uwagę, że całkowanie jest po dy i zmienna też się nazywa y więc nie wprowadza nam to żadnych kłopotów

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int y^{-2}\mathrm{d}y = -y^{-1} + C = -\frac{1}{y} + C \qquad (1.29)$$

Przykład (1.22) rozbijamy na dwa składniki, z czego jeden jest zwyczajną całką z sinusa, natomiast drugi obliczamy ze znanych już metod

$$\int \sin t \mathrm{d}t + \frac{2}{3}\int t^3 \mathrm{d}t = -\cos t + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}t^4 + C = -\cos t + \frac{1}{6}t^4 + C \tag{1.30}$$

Definicja 5 (Całkowanie przez części)**.** Jeżeli u i v są funkcjami zmiennej x mającymi ciągłą pochodną pochodną, to

$$\int uv'\mathrm{d}x = uv - \int u'v\mathrm{d}x \tag{1.31}$$

Przykład:
Rozważmy funkcję $f(x) = xe^x$ i obliczmy jej całkę

$$\int xe^x\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{cc} u = x & u' = 1 \\ v' = e^x & v = e^x \end{array}\right\} = uv - \int u'v\mathrm{d}x = xe^x - \int 1\cdot e^x\mathrm{d}x = e^x(x-1) + C \tag{1.32}$$

Definicja 6 (Całkowanie przez podstawienie (zamianę zmiennej))**.** Jeżeli dla $a \leqslant x \leqslant b$, $g(x) = u$ jest funkcją mającą ciągłą pochodną oraz $A \leqslant g(x) \leqslant B$, a funkcja $f(u)$ jest ciągła w przedziale $[A,\ B]$, to

$$\int f\Big(g(x)\Big)g'(x)\mathrm{d}x = \int f(u)\mathrm{d}u \tag{1.33}$$

przy czym po scałkowaniu prawej strony należy w otrzymanym wyniku podstawić $u = g(x)$.
Przykład:
Rozważmy całkę z funkcji $f(x) = \sin x \cos x$

$$\int \sin x\cos x\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{c} u = \sin x \\ \mathrm{d}u = \cos x\mathrm{d}x \end{array}\right\} = \int u\mathrm{d}u = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}\sin^2 x + C \tag{1.34}$$

Zadanie 2. Oblicz całki (stosując wzór całkowania przez części)

$$\int x\sin x\mathrm{d}x = \tag{1.35}$$

$$\int x2^x\mathrm{d}x = \tag{1.36}$$

$$\int \ln x\mathrm{d}x = \tag{1.37}$$

Pierwszy przykład (1.35) traktujemy jako funkcję $u = x$, a jako funkcję $v' = \sin x$. Licząc pochodną u otrzymujemy 1, natomiast licząc całkę z sinusa otrzymujemy minus cosinus.

$$\int x\sin x\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{cc} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}\right\} = -x\cos x + \int \cos x = -x\cos x + \sin x + C \tag{1.38}$$

Zadanie (1.36) robimy analogicznie jak przykład z definicji całkowania przez części. Tak samo definiujemy funkcję u i v', z tą różnicą, że tym razem mamy 2^x zamiast e^x, czyli całka

$$\int 2^x\mathrm{d}x = \frac{2^x}{\ln 2} + C \tag{1.39}$$

stąd ostatecznie mamy

$$\int x2^x \mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{cc} u = x & u' = 1 \\ v' = 2^x & v = \frac{2^x}{\ln 2} \end{array} \right\} = \frac{x2^x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}\int 2^x \mathrm{d}x = \frac{x2^x}{\ln 2} - \frac{2^x}{\ln^2 2} + C \tag{1.40}$$

Kolejny przykład (1.37)

$$\int \ln x \mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{cc} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array} \right\} = x\ln x - \int x\frac{1}{x}\mathrm{d}x = x\ln x - \int \mathrm{d}x = x\ln x - x + C \tag{1.41}$$

Zadanie 3. Oblicz całki (przez podstawienie)

$$\int xe^{-x^2}\mathrm{d}x = \tag{1.42}$$

$$\int \tan x \mathrm{d}x = \tag{1.43}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \tag{1.44}$$

$$\int \frac{x^3}{1+x^8}\mathrm{d}x = \tag{1.45}$$

W pierwszym przykładzie przyjmujemy podstawienie $x^2 = t$, więc

$$\int xe^{-x^2}\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{c} t = x^2 \\ \mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x \end{array} \right. = \frac{1}{2}\int e^{-t}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}e^{-t} + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C \tag{1.46}$$

W następnym zadaniu wystarczy przedstawić $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ i podstawić za $t = \cos x$, więc

$$\int \tan x \mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{c} t = \cos x \\ \mathrm{d}t = -\sin x\mathrm{d}x \end{array} \right. = -\int \frac{1}{t}\mathrm{d}t = -\ln t + C = -\ln\cos x + C \tag{1.47}$$

Kolejne przykład (1.44) to analog poprzedniego, z tym, że wybieramy za $t = \ln x$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \left\{ \begin{array}{c} t = \ln x \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{x}\mathrm{d}x \end{array} \right. = \int \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \ln t + C = \ln\Big(\ln x\Big) + C \tag{1.48}$$

W przykładzie (1.45) będziemy musieli podstawić $x^4 = t$, i pamiętać, że $x^8 = (x^4)^2$, czyli $x^8 = t^2$, to nas doprowadzi do

$$\int \frac{x^3}{1+x^8}\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{c} t = x^4 \\ \mathrm{d}t = 3x^3\mathrm{d}x \\ x^3\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\mathrm{d}t \end{array} \right. = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{3}\arctan t + C = \frac{1}{3}\arctan x^4 + C \tag{1.49}$$

Zadanie 4. Oblicz całki

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos 2x + \sin^2 x} = \tag{1.50}$$

$$\int \sin^3 x \cos x \mathrm{d}x = \tag{1.51}$$

$$\int (x+1)^{15} \mathrm{d}x = \tag{1.52}$$

$$\int \arccos x \mathrm{d}x = \tag{1.53}$$

$$\int e^x \sin(e^x) \mathrm{d}x = \tag{1.54}$$

W przykładzie (1.50) korzystamy ze wzoru na cosinus podwojonego kąta, czyli

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \tag{1.55}$$

to nam uprości mianownik

$$\cos 2x + \sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x = \cos^2 x \tag{1.56}$$

teraz mamy całkę, która jest już elementarna:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x + C \tag{1.57}$$

W zadaniu (1.51) stosujemy podstawienie $\sin x = t$, prowadzi nas to do

$$\int \sin^3 x \cos x \mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{c} t = \sin x \\ \mathrm{d}t = \cos x \mathrm{d}x \end{array} \right. = \int t^3 \mathrm{d}t = \frac{1}{4} t^4 + C = \frac{1}{4} \sin^4 x + C \tag{1.58}$$

W przykładzie (1.52) podstawiamy za wnętrze nawiasu $t = (x+1)$, co łatwo się sprowadza do całki

$$\int (x+1)^{15} \mathrm{d}x = \int t^{15} \mathrm{d}t = \frac{1}{16} t^{16} + C = \frac{(1+x)^{16}}{16} + C \tag{1.59}$$

Co można w łatwy sposób sprawdzić przez zróżniczkowanie, że wynik ten jest poprawny. Następny przykład trzeba będzie najpierw obliczyć przez części

$$\int \arccos x \mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{cc} u = \arccos x & u' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ v' = 1 & v = x \end{array} \right\} = x \arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x \tag{1.60}$$

W całce, którą obecnie mamy podstawmy $1 - x^2 = t$, więc $x\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\mathrm{d}t$

$$\int \arccos x \mathrm{d}x = x \arccos x - \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t = x \arccos x - \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{t} + C = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C \tag{1.61}$$

W ostatni scałkujemy przez podstawienie $t = e^x$, dlatego

$$\int e^x \sin(e^x) \mathrm{d}x = \int \sin t \mathrm{d}t = -\cos t + C = -\cos e^x + C \tag{1.62}$$