1 Całka oznaczona

Całkę oznaczoną będziemy zapisywali jako

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{1.1}$$

z funkcji $f(x)$, która jest ograniczona w przedziale domkniętym $[a,\ b]$.
Jak obliczyć całkę oznaczoną? Obliczamy najpierw całkę nieoznaczoną z funkcji $f(x)$, co nas doprowadzi do funkcji pierwotnej $F(x)$. Następnie liczymy wstawiamy granicę całkowania (liczymy różnicę granic)

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \tag{1.2}$$

warto zwrócić uwagę, że całka oznaczona nie już funkcją a liczbą, oraz, że po prawej stronie nie mamy już stałej C jak w przypadku całke nieoznaczonych.

Interpretacją geometryczną całki nieoznaczonej. Jest to pole powierzchni ograniczone wykresem funkcji $f(x)$ i osią Ox i prostymi ograniczającymi ten wykres $x = a$ i $x = b$ (wartość bezwzględna).

Zadanie 1. Oblicz całkę oznaczoną:

$$\int_1^e \ln x\mathrm{d}x \tag{1.3}$$

najpierw liczymy całkę nieoznaczoną z funkcji $\ln x$ (przez części)

$$\int \ln x\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{cc} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array} \right. = x\ln x - \int \mathrm{d}x + C = x(\ln x - 1) + C \tag{1.4}$$

teraz liczymy różnicę granicy górnej i dolnej (można już pominąć stałą całkowania)

$$x(\ln x - 1)\Big|_1^e = e(\ln e - 1) - 1(\ln 1 - 1) = e(1-1) - (0-1) = 1 \tag{1.5}$$

dalej takie całki będziemy zapisywali w postaci:

$$\int_1^e \ln x\mathrm{d}x = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \mathrm{d}x = e\ln e - 1\ln 1 - x\Big|_1^e = e - (e-1) = 1 \tag{1.6}$$

1.1 Własności całki oznaczonej

Jeżeli $a \leqslant b \leqslant c$ to

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x \tag{1.7}$$

Stały czynnik można wyciągnąć przed znak całki, tzn.

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{1.8}$$

gdzie k stała.
Całka sumy, równa się sumie całek

$$\int_a^b \Big(f(x) + g(x)\Big)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \tag{1.9}$$

Całkowanie przez zamianę zmiennych:

$$\int_a^b f\Big(g(x)\Big)g'(x)\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\mathrm{d}u \tag{1.10}$$

Zmiana górnej z dolną granicą jest równoznaczna ze wstawieniem znaku minus, tzn.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x \tag{1.11}$$

Przykład:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x \mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{cc} u = \sin x & \mathrm{d}u = \cos x \mathrm{d}x \\ u_d = \sin(0) = 0 & u_g = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{array} \right. = \int_0^1 u\mathrm{d}u = \frac{1}{2}u^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2} \tag{1.12}$$

Przykład:
Oblicz pole powierzchni ograniczone wykresem funkcji $f(x) = x + 1$ w przedziale $[0,\ 4]$ oraz w granicach $[-4, 0]$.
Liczymy całkę oznaczoną z funkcji $f(x)$ w granicach 0, 4.

$$\int_0^4 (x+1)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^4 + x\Big|_0^4 = \frac{1}{2}4^2 + 4 = 12 \tag{1.13}$$

Teraz policzymy w -4,0.

$$\int_{-4}^0 (x+1)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\Big|_{-4}^0 + x\Big|_{-4}^0 = 0 - \frac{1}{2}(-4)^2 + 0 - (-4) = -4 \tag{1.14}$$

ale to jest liczba ujemna! Więc pole powierzchni nie może być ujemne. Jeżeli chcemy policzyć pole powierzchni ograniczone przez wykres funkcji i osią (a wykres znajduje się poniżej osi x należy wziąć wartość bezwzględną). Więc podejście, które zastosowaliśmy w tym przykładzie nie jest do końca poprawne. Musimy znaleźć punkt, w którym wykres funkcji $f(x)$ przecina oś Ox i rozbić naszą całkę na dwa obszary. Część, która jest nad osią i część, która jest pod osią Ox.
Szukamy $f(x) = 0$ czyli $x + 1 = 0$ jest to w punkcie $x_0 = -1$. Na lewo od tego punktu wykres funkcji będzie pod osią, na prawo od x_0 nad osią. Więc

$$P = |\int_{-4}^{-1} (x+1)\mathrm{d}x| + \int_{-1}^0 (x+1)\mathrm{d}x = |\frac{1}{2}x^2\Big|_{-4}^{-1} + x\Big|_{-4}^{-1}| + \frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^0 + x\Big|_{-1}^0 = \tag{1.15}$$

gdzie z pierwszej całki liczymy wartość bezwzględną, ponieważ wykres znajduje się pod osią. Stąd

$$P = |\frac{1}{2}(-1)^2 - \frac{1}{2}(-4)^2 + (-1) - (-4)| - \frac{1}{2}(-1)^2 - (-1) = \frac{11}{2} + \frac{1}{2} = 6 \tag{1.16}$$

Widać, że trzeba uważać przy liczeniu pól powierzchni.

Zadanie 2. Oblicz całki

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \mathrm{d}x = \tag{1.17}$$

$$\int_0^{\pi} \tan x \mathrm{d}x = \tag{1.18}$$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 6x + 10} = \tag{1.19}$$

$$\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x \sin x^2 \mathrm{d}x = \tag{1.20}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos x \mathrm{d}x = \tag{1.21}$$

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x \mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^4}} = \tag{1.22}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^0 e^{2x} \cos x \mathrm{d}x = \tag{1.23}$$

$$\int_0^{\pi} x^3 \sin x \mathrm{d}x = \tag{1.24}$$

$$\int_{-5}^5 e^{-x^2} x \cos x \mathrm{d}x = \tag{1.25}$$

Rozwiązania:

Pierwszą całkę należy rozwiązać przez zamianę zmiennych. Jeżeli przedstawimy $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ i dokonamy podstawienia $u = \cos x$ wtedy

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{cc} u = \cos x & \mathrm{d}u = -\sin x \mathrm{d}x \\ u_d = \cos(0) = 1 & u_g = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right. = -\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u|\Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 = \ln 1 - \ln \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{1.26}$$

$\ln 1 = 0$, natomiast w drugim wyrazie argument można zapisać jako

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 2^{-\frac{1}{2}} \tag{1.27}$$

więc korzystając z własności logarytmu $\log a^b = b \log a$ ostatecznie otrzymujemy

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \ln 2 \tag{1.28}$$

Przykład (1.18) chciałoby się powiedzieć, że rozwiązujemy tak samo, tylko wstawia się inne granice. Jednak tak nie jest! Trzeba uważać, żeby w sposób mechaniczny nie podchodzić do całek oznaczonych! Całka ta nie jest zbieżna. Wynika to z wartości tangensa w $\pi/2$. Czyli ta całka nie istnieje.
Przykład (1.19).

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+6x+10} \tag{1.29}$$

Jest to całka z funkcji wymiernej. Więc ponieważ licznik nie jest pochodną mianownika, musimy policzyć deltę, która w tym przypadku wynosi $\Delta = 36-40 = -4$ czyli jest ujemna. Rozkładamy mianownik na postać kanoniczną czyli

$$x^2+6x+10 = (x-p)^2+q = x^2-2px+p^2+q \tag{1.30}$$

stąd wynika, że $6x = -2px$ czyli $p = -3$ wstawiając tę wartość p do wyrażenia $p^2+q = 10$ otrzymujemy, że $q = 1$, czyli

$$x^2+6x+10 = (x+3)^2+1 \tag{1.31}$$

Jest to wyrażenie, które przedstawia nam mianownik, teraz dokonamy podstawienia $x+3 = u$ czyli $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$, natomiast przy takiej zamianie granice będą się zmieniać od $u_d = 0+3 = 3$ do $u_g = 1+3 = 4$. Więc

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+6x+10} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+3)^3+1} = \int_3^4 \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = \arctan u\Big|_3^4 = \arctan 4 - \arctan 3 \tag{1.32}$$

Następnym przykładzie (1.20) znowu będziemy dokonywali zamiany zmiennych

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x\sin x^2 \mathrm{d}x &= \left\{\begin{array}{lll} u = x^2 & \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x & \frac{1}{2}\mathrm{d}u = x\mathrm{d}x \\ u_d = 0 & u_g = \sqrt{pi/2}^2 = \frac{\pi}{2} & \end{array}\right. = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u \mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\cos u\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0-(-\frac{1}{2}\cos 0) = \frac{1}{2}\end{aligned} \tag{1.33}$$

Przykład (1.21) rozwiązywany jest przez podstawienie.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\cos x \mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{cc} u = \sin x & \mathrm{d}u = \cos x\mathrm{d}x \\ u_d = \sin 0 = 0 & u_g = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \end{array}\right. = \int_0^1 u^4 \mathrm{d}u = \frac{1}{5}u^5\Big|_0^1 = \frac{1}{5} \tag{1.34}$$

Zadanie (1.22)

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} = \left\{\begin{array}{cc} u = x^2 & \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x \\ u_d = 0 & u_g = \frac{1}{2} \end{array}\right. = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{1}{2}\arcsin u\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12} \tag{1.35}$$

Zadanie (1.23) rozwiążemy przez części

$$I_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} e^{2x}\cos x\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{cc} u = e^{2x} & u' = 2e^{2x} \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array} \right. = e^{2x}\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} - 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} e^{2x}\sin x\mathrm{d}x = -e^{\pi} - 2I_2 \tag{1.36}$$

gdzie I_2 jest całką, która wynosi

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} e^{2x}\sin x\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{cc} u = e^{2x} & u' = 2e^{2x} \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right. = -e^{2x}\cos x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} e^{2x}\cos x\mathrm{d}x = -1 + 2I_1 \tag{1.37}$$

wstawiając ten wynik, otrzymujemy

$$I_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} e^{2x}\cos x\mathrm{d}x = -e^{\pi} - 2(-1+2I_1) = 2 - e^{\pi} - 4I_1 \tag{1.38}$$

przenosząc na jedną stroną wyrazy I_1 mamy, że

$$5I_1 = 2 - e^{\pi} \Rightarrow I_1 = \frac{2-e^{\pi}}{5} \tag{1.39}$$

Zadanie (1.24) również rozwiązujemy przez części

$$I = \int_{0}^{\pi} x^3\sin x\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{cc} u = x^3 & u' = 3x^2 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right. = -x^3\cos x\Big|_{0}^{\pi} + 3\int_{0}^{\pi} x^2\cos x\mathrm{d}x = -(\pi)^3(-1) + 3I_1 \tag{1.40}$$

Całkę I_1 dalej rozwiązujemy przez części do momentu, kiedy „pozbędziemy się wolnego” x

$$I_1 = \int_{0}^{\pi} x^2\cos x\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{cc} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array} \right. = x^2\sin x\Big|_{0}^{\pi} - 2\int_{0}^{\pi} x\sin x\mathrm{d}x = -2I_2 \tag{1.41}$$

i ostatni raz liczymy całkę przez części

$$I_2 = -x\cos x\Big|_{0}^{\pi} + \int_{0}^{\pi}\cos x\mathrm{d}x = \pi \tag{1.42}$$

ostatnia całka znika, ponieważ pole powierzchni nad osią i pod osią funkcji cosinus od 0 do π jest takie same, z tą różnicą, że wchodzi jedna część ze znakiem plus a druga ze znakiem ujemny, co prowadzi nas do całki równej zero. Zbierając wszystkie wyrazy z poszczególnych kroków ostatecznie otrzymujemy

$$I = \pi^3 - 6I_2 = \pi^3 - 6\pi \tag{1.43}$$

Ostatnia całka natomiast (1.25) jest relatywnie skomplikowana, żeby sobie z nią poradzić. Ale ze względu, że liczymy wyłącznie całkę oznaczoną można sobie z nią w prosty sposób poradzić

$$\int_{-5}^{5} e^{-x^2}x\cos x\mathrm{d}x \tag{1.44}$$

Warto zwrócić uwagę, że funkcja podcałkowa jest nieparzysta, tzn. $f(-x) = -f(x)$. A ponieważ całkowanie jest po obszarze symetrycznym, więc całka taka musi wynosić zero.

Zadanie 3. Oblicz pole figury ograniczonej przez wykres funkcji i proste:

1. $f(x) = \sin x$, $x = 0$ oraz $x = 2\pi$.
2. $f(x) = \sin^2 x$, $x = 0$ oraz $x = 2\pi$.
3. $f(x) = 1/x$, $x = 1/2$ oraz $x = 2e$.
4. $g(x) = \ln x$, $x = 1/2$ i $x = 4$.

W pierwszym przykładzie należy obliczyć całkę z funkcji $\sin x$ w granicach 0 do 2π. Należy jednak pamiętać, że funkcja $\sin x$ przyjjmuje wartości ujemne, więc trzeba podzielić całkę na części, gdzie wykres jest ponad i pod osią. Obszary znajdujące się pod osią, będą obliczane ze znakiem przeciwnym. Tak więc pole wynosi

$$P = \int_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \mathrm{d}x = -\cos x\Big|_0^{\pi} + |-\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}| = -(-1)-(-1)+|-1-(-1)| = 4 \quad (1.45)$$

W następnym przykładzie możemy bezpośrednio obliczyć całkę oznaczoną z funkcji $\sin^2 x$ w granicach 0 do 2π, ponieważ, wykres nigdy nie znajduje się pod osią iksów. Stąd

$$P = \int_0^{2\pi} \sin^2 x = \left\{ \begin{array}{ll} u = \sin x & u' = \cos x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right. = -\cos x \sin x\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos^2 x \mathrm{d}x \quad (1.46)$$

Pierwszy człon wynosi zero, natomiast drugi zamieniamy z jedynki trygonometrycznej ($\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$) i „przerzucamy” na drugą stronę, co nas prowadzi do

$$2\int_0^{2\pi} \sin^2 x \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x = 2\pi \Rightarrow P = \pi \quad (1.47)$$

Kolejny przykład rozwiązujemy analogicznie.

$$P = \int_{\frac{1}{2}}^{2e} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x|\Big|_{\frac{1}{2}}^{2e} = \ln(2e) - \ln(\frac{1}{2}) = 1 + 2\ln 2 \quad (1.48)$$

Kolejnym przykładzie znowu musimy rozbić obszary całkowania, ponieważ wykres funkcji logarytm znajduje się pod osią Ox, gdy $x \in (0, 1]$. Najpierw policzymy sobie całkę nieoznaczoną z $\ln x$, którą liczymy przez części

$$\int \ln x = \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array} \right. = x\ln x - \int \mathrm{d}x = x(\ln x + 1) + C \quad (1.49)$$

Wiemy teraz, że obszar całkowania należy podzielić na $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ i $x \in (1, 4]$, więc

$$P = |x(\ln x + 1)|\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} + |x(\ln x + 1)|\Big|_1^4 = |1 - \frac{1}{2}(1 - \ln 2)| + 4(\ln 4 + 1) - 1 = \frac{7}{2} + \frac{17}{2}\ln 2 \quad (1.50)$$