1 Całka niewłaściwa

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ograniczona i całkowalna w każdym przedziale skończonym $a \leqslant x \leqslant b$ (a ustalone i b dowolne) oraz istnieje granica

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{1.1}$$

to granicę tę nazywamy całką niewłaściwą funkcji $f(x)$ w przedziale $[a,\infty]$ i zapisujemy co zapisujemy

$$\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x \tag{1.2}$$

analogicznie określamy dolną granicę równą $-\infty$ jako granicę

$$\lim_{b\to-\infty}\int_b^a f(x)\mathrm{d}x \tag{1.3}$$

co zapisujemy

$$\int_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x \tag{1.4}$$

Obliczanie takich całek sprowadza się do obliczenia całki nieoznaczonej, następnie całki oznaczonej w granicach a, b i przejściem z b do nieskończoności (bądź do minus nieskończoności).

Zadanie 1. Oblicz całkę niewłaściwą

$$\int_0^\infty e^{-3x}\mathrm{d}x \tag{1.5}$$

Najpierw policzymy całkę nieoznaczoną, co należy wykonać poprzez podstawienie $u = -3x$, więc

$$\int e^{-3x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\int e^u\mathrm{d}u = -\frac{1}{3}e^u + C = -\frac{1}{3}e^{-3x} + C \tag{1.6}$$

Następnie obliczamy tę całkę w granicach zero, jakieś v, które następnie będzie dążyło do nieskończoności

$$-\frac{1}{3}e^{-3x}\Big|_0^v = -\frac{1}{3}e^{-3v} + \frac{1}{3}e^0 = -\frac{1}{3}e^{-3v} + \frac{1}{3} \tag{1.7}$$

Liczymy granicę

$$\lim_{v\to\infty} e^{-3v} = 0 \tag{1.8}$$

więc wynik

$$\int_0^\infty e^{-3x}\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \tag{1.9}$$

Zadanie 2. Oblicz całki

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2} = \tag{1.10}$$

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x} \sin x \mathrm{d}x = \tag{1.11}$$

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{e^{1/x}}{x^2} \mathrm{d}x = \tag{1.12}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\arctan x)^2}{1+x^2} \mathrm{d}x = \tag{1.13}$$

$$\int_{0}^{+\infty} x e^{-x^2} \mathrm{d}x = \tag{1.14}$$

$$\int_{0}^{+\infty} x \ln x \mathrm{d}x = \tag{1.15}$$

Zadanie (**??**) sprowadzamy do postaci kanonicznej. Łatwo zauważyć, że w mianowniku znajduje się wyrażenie $(x+1)^2+1$. Z takimi całkami mieliśmy już kilka razy styczność, więc można szybko zgadnąć rezultat (lub obliczyć poprzez podstawienie $x+1=t$, co doprowadzi do całki dającej arcus tangens), więc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2} = \lim_{v\to\infty} \arctan(x+1)\Big|_{-v}^{+v} = \lim_{v\to\infty} \Big(\arctan(1+v) - \arctan(1-v)\Big) = \pi \tag{1.16}$$

Następne zadanie trzeba policzyć poprzez części, najpierw wykonamy obliczenia dla całek nieoznaczonych, później wprowadzimy granice.

$$I_1 = \int e^{-x} \sin x \mathrm{d}x = \begin{pmatrix} u = \sin x & u' = \cos x \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{pmatrix} = -e^{-x} \sin x + \underbrace{\int e^{-x} \cos x \mathrm{d}x}_{=I_2} \tag{1.17}$$

obliczamy całkę I_2 również przez części

$$I_2 = \begin{pmatrix} u = \cos x & u' = \sin x \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{pmatrix} = -e^{-x} \cos x - \underbrace{\int e^{-x} \sin x \mathrm{d}x}_{=I_1} \tag{1.18}$$

Czyli

$$I_1 = -e^{-x} \sin x + I_2 = -e^{-x} \sin - e^{-x} \cos x - I_1 \tag{1.19}$$

dodając stronami całkę I_1 otrzymujemy

$$2I_1 = -e^{-x}\Big(\sin x + \cos x\Big) \tag{1.20}$$

Dzieląc stronami przez 2 i przechodząc do naszych granic mamy

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x} \sin x \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \lim_{v\to\infty} e^{-x}\Big(\sin x + \cos x\Big)\Big|_{0}^{v} = -\frac{1}{2} \lim_{v\to\infty} e^{-v}(\sin v + \cos v) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \tag{1.21}$$

Pierwszy wyraz znika, ponieważ granica e^{-x} przy $x \to \infty$ jest zero, natomiast funkcje sinus i cosinus są ograniczone.
W zadaniu (**??**) wykonujemy podstawienie $\frac{1}{x} = t$, czyli $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$, więc całka nieoznaczona będzie postaci

$$\int e^{-t}\mathrm{d}t = -e^{-t} + C = -e^{-\frac{1}{x}} + C \tag{1.22}$$

wstawiając granicę mamy

$$-e^{-\frac{1}{x}}\Big|_1^{+\infty} = -e \tag{1.23}$$

pominęliśmy tutaj już przechodzenie z v do nieskończoności.
W następny przykładzie (**??**) robimy podstawienie $\arctan x = t$, to nas doprowadzi do całki postaci

$$\int t^2\mathrm{d}t = \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{3}(\arctan x)^3 + C \tag{1.24}$$

Licząc teraz granice

$$\frac{1}{3}(\arctan x)^3\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{3}\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^3 - \frac{1}{3}\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)^3 = \frac{\pi^3}{12} \tag{1.25}$$

W przykładzie (**??**) dokonujemy podstawienie $x^2 = t$, stąd

$$\int xe^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int e^{-t}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C \tag{1.26}$$

więc całka w granicach wynosi

$$-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^{+\infty} = 0 + \frac{1}{2} \tag{1.27}$$

Ostatni przykład (**??**) można łatwo rozwiązać, ponieważ jest to funkcja nieograniczona, czyli nie całka taka nie jest zbieżna. Funkcja x jak i funkcja $\ln x$ nie są ograniczone, więc ich iloczyn też nie jest funkcją ograniczoną.