Energia Fermiego

1. Załóżmy, że poziom Fermiego znajduje się w paśmie przewodzenia (układ jest silnie zdegenerowany). Wtedy funkcja Fermiego – Diraca może być przybliżona funkcją schodkową (w $T = 0$)

$$f(E) = \begin{cases} 1; \text{ dla } E < F \\ 0; \text{ dla } E > F \end{cases},$$

i wtedy gęstość elektronów w paśmie przewodzenia

$$\begin{aligned} n &= \int_0^F \rho_c(E)\, dE = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m_c^*}{\hbar^2}\right)^{3/2} \int_0^F (E - E_c)^{1/2}\, dE = \\ &= \frac{1}{3\pi^2}\left(\frac{2m_c^*}{\hbar^2}\right)^{3/2} (F - E_c)^{3/2}\,. \end{aligned} \tag{F.1}$$

Jak widać, jest to wielkość niezależna od temperatury, co jest charakterystyczne dla metali i dla interesujących nas, silnie domieszkowanych półprzewodników.

Możemy policzyć, jaka musi być gęstość nośników, by poziom Fermiego znajdował się w paśmie przewodzenia na niewielkiej głębokości, np. $30\,meV$. Z (F.1) wynika, że ponieważ dla $GaAs$ $m_e^* = 0.067\,m_e$, to

$$\begin{aligned} n &= \left(2 \times 0.067 \times 10^{-30}\, kg / 1.1 \times 10^{-68}\, J^2 s^2\right)^{1.5} \\ &\quad \times \left(0.03\; eV \times 1.6 \times 10^{-19}\, C\right)^{1.5} / 3\pi^2, \end{aligned}$$

czyli

$$n = 4.4 \times 10^{17}\, cm^{-3}.$$

Wynik oznacza, że przy gęstości nośników tego rzędu $GaAs$ zachowuje się jak metal.

2. Przyjmijmy teraz, że energia Fermiego jest głęboko w przerwie energetycznej, tak że możemy przyjąć za prawdziwą relację: $E - F \gg kT$. Wtedy rozkład Fermiego przechodzi w klasyczny rozkład Boltzmanna

$$\exp\left[-\frac{E - F}{kT}\right].$$

Zatem

$$\begin{aligned} n &= \int\limits_0^\infty \rho_c\left(E\right)\exp\left[-\frac{E-F}{kT}\right]dE = \\ &= \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m_e^*}{\hbar^2}\right)^{3/2}\exp\left(\frac{F}{kT}\right)\int\limits_0^\infty \left(E-E_c\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{E}{kT}\right)dE = \\ &= N_c\exp\left[-\frac{E_c-F}{kT}\right], \end{aligned} \tag{F.2}$$

gdzie: N_c jest *efektywną gęstością stanów* w paśmie przewodzenia

$$N_c = \frac{1}{4}\left(\frac{2m_e^* kT}{\pi\hbar^2}\right)^{3/2}.$$

Podobnie dla dziur w paśmie walencyjnym.

Ponieważ

$$\begin{aligned} f_v\left(E\right) &= 1 - f_c\left(E\right) = 1 - \frac{1}{1+\exp\left(\frac{E-F}{kT}\right)} \\ &= \frac{1}{1+\exp\left(\frac{F-E}{kT}\right)}, \end{aligned}$$

to w przybliżeniu rozkładem Boltzmanna otrzymujemy, że gęstość dziur w paśmie walencyjnym w zależności od położenia stanów względem poziomu Fermiego wynosi

$$p = \int\limits_0^\infty \rho_v\left(E\right)\exp\left[-\frac{F-E}{kT}\right]dE = N_v\exp\left[-\frac{F-E_v}{kT}\right], \tag{F.3}$$

gdzie: N_v jest efektywną gęstością stanów w paśmie walencyjnym

$$N_v = \frac{1}{4}\left(\frac{2m_h^* kT}{\pi\hbar^2}\right)^{3/2}.$$

Rozkład obsadzeń w półprzewodnikach odgrywa tę samą rolę co obsadzenia w kwantowym dwupoziomowym systemie o energiach E_c i E_v

$$E_c - E_v = E_g,$$

a gęstość stanów jest dana przez N_v i N_c.

Jak widać relacje (F.2) i (F.3) są przydatne do wyznaczania położenia poziomu Fermiego

$$F = E_c - kT\ln\frac{N_c}{n} = E_v + kT\ln\frac{N_v}{p}.$$

Poza tym wielkość

$$np = N_c N_v \exp\left(-\frac{E_g}{kT}\right),$$

nie zależy od położenia poziomu Fermiego i dla określonej temperatury iloczyn gęstości elektronów i dziur pozostaje stały bez względu na domieszkowanie.

Otrzymane wzory na gęstości elektronów w paśmie przewodzenia i dziur w paśmie walencyjnym zapiszemy w rozwiniętej, często spotykanej formie

$$\begin{aligned} n &= \frac{(8\pi m_e^* kT)^{3/2}}{h^3} \exp\left[-\frac{E_c - F}{kT}\right], \\ p &= \frac{(8\pi m_h^* kT)^{3/2}}{h^3} \exp\left[-\frac{F - E_v}{kT}\right], \end{aligned}$$

a iloczyn

$$np = \frac{(8\pi kT)^3 \left(m_h^* m_e^*\right)^{3/2}}{h^6} \exp\left(-\frac{E_g}{kT}\right).$$

3. Zauważmy, że w samoistnym półprzewodniku, w którym

$$n = p = n_i,$$

energia Fermiego wynosi

$$F = \frac{E_c - E_v}{2} + \frac{3kT}{4} \ln\left(\frac{m_h^*}{m_e^*}\right).$$

Tak więc w półprzewodnikach samoistnych energia Fermiego znajduje się prawie w środku przerwy energetycznej. Łatwo sprawdzić, że poprawka związana z różnicą mas efektywnych elektronów i dziur jest względnie mała i w większości przypadków do zaniedbania.

Literatura

Patrz literatura w B. Ziętek, *Optoelektronika*, Wydawnictwo UMK, Toruń 2004.